2　基本式

2.1　座標の３軸回転

移動体に固定した座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ が初め空間に固定した座標系 O-xyz に一致していたものとする．その座標軸を，原点を固定してその周りに回転して新座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ を得たとき，任意点 P の両座標系に関する座標を求める．

座標系 O-xyz のそれぞれの座標軸に沿う単位ベクトルを $\mathbf{e}_x$，$\mathbf{e}_y$，$\mathbf{e}_z$，同様に新座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ のそれぞれの座標軸に沿う単位ベクトルを $\bar{\mathbf{e}}_x$，$\bar{\mathbf{e}}_y$，$\bar{\mathbf{e}}_y$ とする．さらにこの新座標系の座標軸の方向余弦を $\{\,l_1, m_1, n_1\,\}$，$\{\,l_2, m_2, n_2\,\}$，$\{\,l_3, m_3, n_3\,\}$ とすれば

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{e}}_x &= l_1\mathbf{e}_x + m_1\mathbf{e}_y + n_1\mathbf{e}_z \\
\bar{\mathbf{e}}_y &= l_2\mathbf{e}_x + m_2\mathbf{e}_y + n_2\mathbf{e}_z \\
\bar{\mathbf{e}}_z &= l_3\mathbf{e}_x + m_3\mathbf{e}_y + n_3\mathbf{e}_z
\end{aligned}
$$

と書ける．ところが任意点 P の位置ベクトルを両座標系に関して表せば

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \bar{x}\bar{\mathbf{e}}_x + \bar{y}\bar{\mathbf{e}}_y + \bar{z}\bar{\mathbf{e}}_z \\
\overrightarrow{OP} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\ \bar{x}\bar{\mathbf{e}}_x + \bar{y}\bar{\mathbf{e}}_y + \bar{z}\bar{\mathbf{e}}_z \\
&= \bar{x}(l_1\mathbf{e}_x + m_1\mathbf{e}_y + n_1\mathbf{e}_z) + \bar{y}(l_2\mathbf{e}_x + m_2\mathbf{e}_y + n_2\mathbf{e}_z) + \bar{z}(l_3\mathbf{e}_x + m_3\mathbf{e}_y + n_3\mathbf{e}_z) \\
&= (l_1\bar{x} + l_2\bar{y} + l_3\bar{z})\mathbf{e}_x + (m_1\bar{x} + m_2\bar{y} + n_3\bar{z})\mathbf{e}_y + (n_1\bar{x} + n_2\bar{y} + n_3\bar{z})\mathbf{e}_z \\
&= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z
\end{aligned}
$$

単位ベクトルの係数を比較すれば

$$
\begin{array}{rrcrcr}
x = & l_1\ \bar{x} & + & l_2\ \bar{y} & + & l_3\ \bar{z} \\
y = & m_1\ \bar{x} & + & m_2\ \bar{y} & + & m_3\ \bar{z} \\
z = & n_1\ \bar{x} & + & n_2\ \bar{y} & + & n_3\ \bar{z}
\end{array}
$$

または行列を用いて

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \tag{2.1a}
$$

と書ける．座標軸に沿った方向余弦は互いに直交し，それぞれのノルムは 1 であるから，この係数行列の要素を転置すれば逆行列になる．

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.1b}$$

回転式（2.1a）と（2.1b）は関係式として同じ意味を持つ．もちろん方向余弦と座標は未知数であり，それぞれの有限回転問題に当てはめて求める必要がある．ここではこれを回転式，その 3 行 3 列の行列（$[3,3]$ と書く）を回転行列と呼ぶ．

命題どおり $\{\,x,\ y,\ z\,\}$ は空間に固定した座標系 O-xyz に関する座標であり，$\{\,\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}\,\}$ は回転後の移動体に固定した座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ に関する座標である．点 P が空間に固定されているとすると回転式（2.1ab）の両辺の座標の一方は移動体に固定された座標系に関する座標になる．従ってこれらの回転式は座標系の変換式となる．

しかし座標系 O-xyz と座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ が初めに一致していたことは，その状態の座標系 O-xyz に関する座標 $\{\,x_0,\ y_0,\ z_0\,\}$ は座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ に関する座標 $\{\,\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}\,\}$ と共通である．点 P が移動体に固定されているとすると回転式（2.1ab）の両辺の座標はどちらも空間に固定された座標系に関する座標成分になる．従って回転式（2.1a）は

$$\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{bmatrix} \tag{2.1a$'$}$$

とも書ける．同様に回転式（2.1b）も

$$\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\\ l_3 & m_3 & n_3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix} \tag{2.1b$'$}$$

と書ける．座標系は変わらず座標成分が変わるので回転式（2.1a′）と（2.1b′）は座標成分の変換式となる．

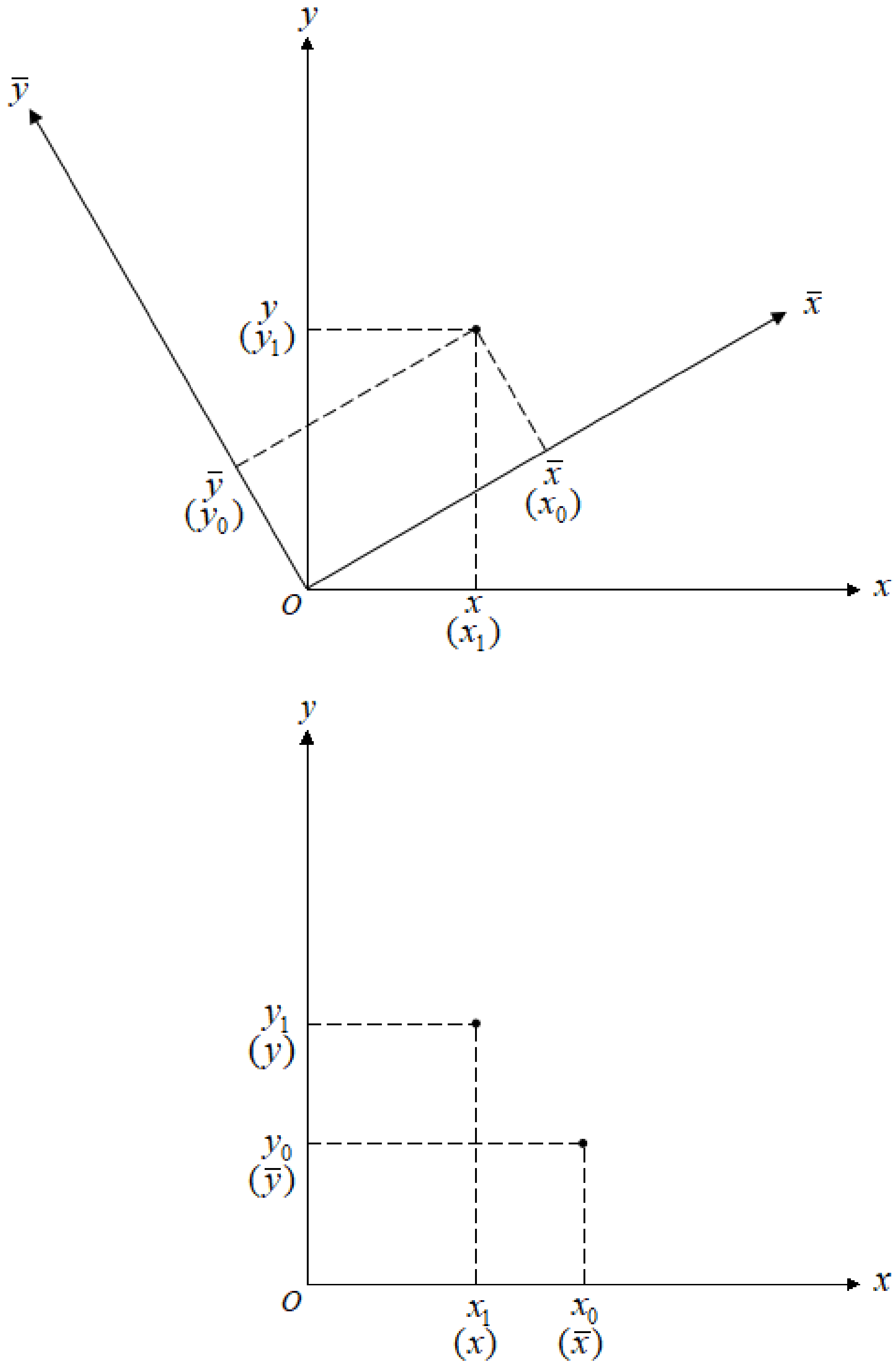

Fig.2　座標系の変換と座標成分の変換

2.2　姿勢角と回転行列

回転式（2.1ab）のような回転行列が与えられたとき，方向余弦から成るその行列要素から回転後の新座標系の姿勢角を知ることができる．回転角が

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_{x \wedge y \wedge z} < \frac{\pi}{2}$$

である場合，回転行列の要素と方向係数（傾き）の間に以下の関係式が成り立つ [*1]．

- 方位角/アジマス θ_z

新座標系の $\bar{x}$ 軸の方向余弦は $\{\ l_1,\ m_1,\ n_1\ \}$ であるから，zx 平面からの $\bar{x}$ 軸の z 軸周りの方向係数は：

$$\tan\theta_z = \frac{m_1}{l_1} \tag{2.2a}$$

- 傾斜角/ピッチ θ_y

同じ $\bar{x}$ 軸の方向余弦を用いて，xy 平面からの x 軸の y 軸周りの方向係数は：

$$\tan\theta_y = \frac{-n_1}{\sqrt{(l_1{}^2 + m_1{}^2)}} \tag{2.2b}$$

- 傾斜角/ロール θ_x

新座標系の $\bar{y}$ 軸の方向余弦は $\{\ l_2,\ m_2,\ n_2\ \}$ であるから，xy 平面からの y 軸の x 軸周りの方向係数は：

$$\tan\theta_x = \frac{n_2}{\sqrt{(l_2{}^2 + m_2{}^2)}} \tag{2.2c}$$

[*1] 単に”tan”を使うことによる制約