3　回転行列

3.1　二次元の回転行列

二次元の 1 軸回転の基本回転式を導く．三次元の回転行列に発展させるため 3 行 3 列の三次元行列で表現する．

3.1.1　1 座標軸周りに回転

移動体に固定した座標系が初め空間に固定した座標系 O-xyz に一致していたものとする．その 1 座標軸を，原点を固定してその周りに回転して新座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ を得たときの任意点 P の両座標系に関する座標を求める．

回転して得られた座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ のそれぞれの座標軸の方向余弦を求める．ここでは例えば x 軸に対する $\bar{x}$ の回転角を $(\bar{x}x)$ と書く．

$$
\begin{aligned}
l_1 &= \cos(\bar{x}x) \quad & m_1 &= \cos(\bar{x}y) \quad & n_1 &= \cos(\bar{x}z) \\
l_2 &= \cos(\bar{y}x) \quad & m_2 &= \cos(\bar{y}y) \quad & n_2 &= \cos(\bar{y}z) \\
l_3 &= \cos(\bar{z}x) \quad & m_3 &= \cos(\bar{z}y) \quad & n_3 &= \cos(\bar{z}z)
\end{aligned}
$$

- z 軸周りに ω_z 回転

  回転角から方向余弦を求めて

$$
\begin{array}{lll}
l_1 = \cos\omega_z & m_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - \omega_z) = \sin\omega_z & n_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\
l_2 = \cos(\frac{\pi}{2} + \omega_z) = -\sin\omega_z & m_2 = \cos\omega_z & n_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \\
l_3 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 & m_3 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 & n_3 = \cos 0 = 1
\end{array}
$$

これらを回転式（2.1ab）に代入すると次式が得られる．

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_z & -\sin\omega_z & 0 \\ \sin\omega_z & \cos\omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \tag{3.1a}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_z & \sin\omega_z & 0 \\ -\sin\omega_z & \cos\omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3.1b}
$$

また表記を変えて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_z & -\sin\omega_z & 0 \\ \sin\omega_z & \cos\omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \tag{3.1a$'$}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_z & \sin\omega_z & 0 \\ -\sin\omega_z & \cos\omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \tag{3.1b$'$}$$

とも書ける．

他の軸周りの回転式も回転式（3.1ab）の３変数対称式として得られる．

- y 軸周りに ω_y 回転

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_y & 0 & \sin\omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\omega_y & 0 & \cos\omega_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \tag{3.2a}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_y & 0 & -\sin\omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega_y & 0 & \cos\omega_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3.2b}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_y & 0 & \sin\omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\omega_y & 0 & \cos\omega_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \tag{3.2a$'$}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_y & 0 & -\sin\omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega_y & 0 & \cos\omega_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \tag{3.2b$'$}$$

- x 軸周りに ω_x 回転

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_x & -\sin\omega_x \\ 0 & \sin\omega_x & \cos\omega_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \tag{3.3a}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_x & \sin\omega_x \\ 0 & -\sin\omega_x & \cos\omega_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3.3b}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y1 \\ z1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_x & -\sin\omega_x \\ 0 & \sin\omega_x & \cos\omega_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \tag{3.3a$'$}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_x & \sin\omega_x \\ 0 & -\sin\omega_x & \cos\omega_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y1 \\ z1 \end{bmatrix} \tag{3.3b$'$}$$