3.2　三次元の回転行列（１）

これまでの基本式を応用して姿勢角を与えて三次元の回転式を導く．

基本的に 3 姿勢角が既知でなければ姿勢は定まらない．しかし特定の軸の姿勢角をゼロと置くことで二次元の回転行列を組み合わせて比較的容易に回転式を導くことができる．ここでは座標軸を軸毎に姿勢角で順次回転させて目標の姿勢角を持つ姿勢を得る．

3.2.1　x 軸周りの傾斜角がゼロ

姿勢角 $\theta_x = 0$，$\theta_y \neq 0$，$\theta_z \neq 0$ の回転式および回転行列を導く

第 2.1 項で述べたように，空間に固定したグローバル座標系 O-xyz と移動体に固定したローカル座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ があって任意点 P の両座標系に関する座標を求める．しかし，どちらの座標系に関する座標を既知とするかによって二つのアプローチに分かれる．

■グローバル座標系に関する座標が既知

任意点 P はグローバル座標系に固定され，座標系が回転してもグローバル座標系に関する任意点 P の座標 $\{x, y, z\}$ は変化しないものとする．座標系回転後のローカル座標系に関する点 P の座標 $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ を求める．よって座標系は<u>ローカル座標系の座標軸</u>周りに回転する．

先ず，ローカル座標系の $\bar{z}$ 軸（初めは z 軸と共通）周りに座標系を姿勢角 θ_z で回転させる．初めは両座標系は共通なのでグローバル座標系のヨウ/ω_z はアジマス/θ_z は一致し，$\bar{x}$ 軸と $\bar{y}$ 軸は xy 平面上にある．回転式（3.1b）をそのまま用いれば

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

と書ける．

次に，新座標系 0-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ をローカル座標系の $\bar{y}$ 軸周りに θ_y だけ回転させる．姿勢角 $\theta_x = 0$ なので $\bar{y}$ 軸は xy 平面上に残る．回転式（3.2b）を用いれば

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\bar{\bar{x}}\\ \bar{\bar{y}}\\ \bar{\bar{z}}\end{bmatrix}
&= \begin{bmatrix}\cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\cos\theta_z & \sin\theta_z & 0\\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\cos\theta_y\cos\theta_z & \cos\theta_y\sin\theta_z & -\sin\theta_y\\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0\\ \sin\theta_y\cos\theta_z & \sin\theta_y\sin\theta_z & \cos\theta_y\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.5b}
$$

これを逆に解いて

$$
\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}\cos\theta_y\cos\theta_z & -\sin\theta_z & \sin\theta_y\cos\theta_z\\ \cos\theta_y\sin\theta_z & \cos\theta_z & \sin\theta_y\sin\theta_z\\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\bar{\bar{x}}\\ \bar{\bar{y}}\\ \bar{\bar{z}}\end{bmatrix}
\tag{3.5a}
$$

■ローカル座標系に関する座標が既知で不変

任意点 P はローカル座標系に固定され，座標系が回転してもローカル座標系に関する座標 $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ は変化しないものとする．座標系回転後のグローバル座標系に関する点 P の座標 $\{x, y, z\}$ を求める．よって座標系はグローバル座標系の座標軸周りに回転する．

先ず，グローバル座標系の y 軸（初めは $\bar{y}$ 軸と共通）周りに座標系を姿勢角 θ_y で回転させる．回転式（3.2a′）を用いれば

$$
\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}\cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{bmatrix}
$$

と書ける．このとき $\bar{z}$ 軸は zx 平面上にある．

次に，ローカル座標系 0-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ を グローバル座標系の z 軸周りに θ_z だけ回転させる．

回転式（3.1a′）を用いれば

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_y\cos\theta_z & -\sin\theta_z & \sin\theta_y\cos\theta_z \\ \cos\theta_y\sin\theta_z & \cos\theta_z & \sin\theta_y\sin\theta_z \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \qquad (3.5\mathrm{a}')
\end{aligned}
$$

これは回転式（3.5a）に他ならない．

3.2.2　z 軸周りの方位角がゼロ

姿勢角 $\theta_x \neq 0$，$\theta_y \neq 0$，$\theta_z = 0$ の回転式および回転行列を導く．

ローカル座標系の $\bar{x}$ 軸とグローバル座標系の各座標軸との関係を考える．アジマス $\theta_z = 0$ であるからアジマスの定義によれば x 軸は zx 平面に含まれる．また $\bar{x}$ 軸は $y\bar{y}$ 平面に垂直で xy 平面から y 軸周りに θ_y だけ傾いている．よって $\bar{x}$ 軸の方向余弦は

$$
\begin{aligned}
\{\ l_1,\ \ m_1,\ \ n_1\ \} &= \{\ \cos\theta_y,\ \cos\frac{\pi}{2},\ \cos(\frac{\pi}{2}+\theta_y)\ \} \\
&= \{\ \cos\theta_y,\ 0,\ -\sin\theta_y\ \} \qquad \cdots\ \bar{x}\text{ 軸}
\end{aligned}
$$

と定まる．

次に $\bar{y}$ 軸は xy 平面から x 軸周りに θ_x だけ傾いているから

$$
\begin{aligned}
\{\ l_2,\ \ m_2,\ \ n_2\ \} &= \{\ l_2,\ m_2,\ \cos(\frac{\pi}{2}-\theta_x)\ \} \\
&= \{\ l_2,\ m_2,\ \sin\theta_x\ \}
\end{aligned}
$$

ただし，これは未知の成分 l_2 と m_2 を含む．$\bar{x}$ 軸の方向余弦との内積は 0 だから

$$
l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = l_2\cos\theta_y + 0\cdot m_2 - \sin\theta_y\sin\theta_x = 0
$$

よって

$$
l_2 = \frac{\sin\theta_y\sin\theta_x}{\cos\theta_y}
$$

さらに方向余弦のノルムは 1 だから

$$
{l_2}^2 + m_2^2 + n_2^2 = \frac{\sin^2\theta_y\sin^2\theta_x}{\cos^2\theta_y} + m_2^2 + \sin^2\theta_x = 1
$$

よって

$$
\begin{aligned}
m_2 &= \pm\sqrt{1-\sin^2\theta_x - \frac{\sin^2\theta_y \sin^2\theta_x}{\cos^2\theta_y}} \\
&= \pm\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_x}{\cos^2\theta_y}}
\end{aligned}
$$

と定まるが，$\bar{y}$ 軸の方向余弦の y 成分は y 軸上正方向にあるから

$$
m_2 = +\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_x}{\cos^2\theta_y}}
$$

と正となる．またこの式が成り立つためには傾斜角は次の条件を満たす必要がある．

$$
|\theta_x| + |\theta_y| \leq \frac{\pi}{2}
$$

以上から $\bar{y}$ 軸の方向余弦は

$$
\begin{aligned}
\left\{\ l_2,\quad m_2,\quad n_2\ \right\} &= \left\{\ \frac{\sin\theta_x}{\cos\theta_y}\sin\theta_y,\ \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_x}{\cos^2\theta_y}},\ \sin\theta_x\ \right\} \\
&= \left\{\ s\cdot\sin\theta_y,\ c,\ \sin\theta_x\ \right\} \qquad \cdots\ \bar{y}\text{ 軸}
\end{aligned}
$$

ここで $s = \sin\theta_x/\cos\theta_y$，$c = \sqrt{(1-s^2)}$ と置いた．

残りの $\bar{z}$ 軸の方向余弦は，ここで求めた $\bar{x}$ 軸と $\bar{y}$ 軸の方向余弦の外積として得られる．

$$
\begin{aligned}
\left\{\ l_3,\quad m_3,\quad n_3\ \right\} &= \left\{\ m_1n_2 - n_1m_2,\quad n_1l_2 - l_1n_2,\quad l_1m_2 - m_1l_2\ \right\} \\
&= \left\{\ -n_1m_2,\quad n_1l_2 - l_1n_2,\quad l_1m_2\ \right\} \\
&= \left\{\ c\cdot\sin\theta_y,\quad -s,\quad c\cdot\cos\theta_y\ \right\} \qquad \cdots\ \bar{z}\text{ 軸}
\end{aligned}
$$

以上をまとめると

$$
\begin{array}{lll}
l_1 = \cos\theta_y & m_1 = 0 & n_1 = -\sin\theta_y \\
l_2 = s\cdot\sin\theta_y & m_2 = c & n_2 = \sin\theta_x \\
l_3 = c\cdot\sin\theta_y & m_3 = -s & n_3 = c\cdot\cos\theta_y
\end{array}
$$

これらを式（2.1ab）に代入する

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & s\cdot\sin\theta_y & c\cdot\sin\theta_y \\ 0 & c & -s \\ -\sin\theta_y & \sin\theta_x & c\cdot\cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \tag{3.6a}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ s\cdot\sin\theta_y & c & \sin\theta_x \\ c\cdot\sin\theta_y & -s & c\cdot\cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3.6b}
$$

ただし

$$s = \frac{\sin\theta_x}{\cos\theta_y}, \quad c = \sqrt{(1-s^2)}$$
$$|\theta_x| + |\theta_y| \leq \frac{\pi}{2}$$

パラメーター s，c の幾何的意味については後述する．

3.2.3　３姿勢角による回転式

姿勢角 $\theta_x \neq 0$，$\theta_y \neq 0$，$\theta_z \neq 0$ の回転式および回転行列を導く

既に z 軸周りの方位角がゼロの場合の回転式は前項で求めた．これにアジマスの回転を加える．回転式（3.1b）と回転式（3.6b）を用いるが回転させる順番に気を付ける．

グローバル座標系にアジマス θ_z の回転を先に与える．

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ に式 (3.6b) で傾斜角を考慮する．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \\ \bar{\bar{z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ s\cdot\sin\theta_y & c & \sin\theta_x \\ c\cdot\sin\theta_y & -s & c\cdot\cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_y\cos\theta_z & \cos\theta_y\sin\theta_z & -\sin\theta_y \\ s\cdot\sin\theta_y\cos\theta_z - c\cdot\sin\theta_z & s\cdot\sin\theta_y\sin\theta_z + c\cdot\cos\theta_z & \sin\theta_x \\ c\cdot\sin\theta_y\cos\theta_z + s\cdot\sin\theta_z & c\cdot\sin\theta_y\sin\theta_z - s\cdot\cos\theta_z & c\cdot\cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.7b}$$

これを逆に解いて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y\cos\theta_z & s\cdot\sin\theta_y\cos\theta_z - c\cdot\sin\theta_z & c\cdot\sin\theta_y\cos\theta_z + s\cdot\sin\theta_z \\ \cos\theta_y\sin\theta_z & s\cdot\sin\theta_y\sin\theta_z + c\cdot\cos\theta_z & c\cdot\sin\theta_y\sin\theta_z - s\cdot\cos\theta_z \\ -\sin\theta_y & \sin\theta_x & c\cdot\cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \\ \bar{\bar{z}} \end{bmatrix} \tag{3.7a}$$

ただし

$$s = \frac{\sin\theta_x}{\cos\theta_y}, \quad c = \sqrt{(1-s^2)}$$
$$|\theta_x| + |\theta_y| \leq \frac{\pi}{2}$$

以上で分かるように，回転式（3.7ab）は姿勢角から姿勢を求める一般式であって， x 軸周りの傾斜角 $\theta_x = 0$ と置けば，$s = 0$，$c = 1$ から回転式（3.5ab）が，z 軸周りの傾斜

角 $\theta_z = 0$ と置けば，$\sin\theta_z = 0$，$\cos\theta_z = 1$ から回転式（3.6ab）が得られる．以降，式（3.7ab）を3姿勢角による回転式と呼ぶ

ここで式（2.2abc）を用いて座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ の姿勢角の方向係数を調べる．

- 方位角/アジマス θ_z

$$\tan\theta_z = \frac{m_1}{l_1} = \frac{\cos\theta_y \sin\theta_z}{\cos\theta_y \cos\theta_z} = \frac{\sin\theta_z}{\cos\theta_z} \tag{3.8a}$$

- 傾斜角/ピッチ θ_y

$$\tan\theta_y = \frac{-n_1}{\sqrt{(l_1{}^2 + m_1{}^2)}} = \frac{-(-\sin\theta_y)}{\sqrt{(\cos^2\theta_y \cos^2\theta_z + \cos^2\theta_y \sin^2\theta_z)}} = \frac{\sin\theta_y}{\cos\theta_y} \tag{3.8b}$$

- 傾斜角/ロール θ_x

$$\begin{aligned}\tan\theta_x =& \frac{n_2}{\sqrt{(l_2{}^2 + m_2{}^2)}} \\ =& \frac{\sin\theta_x}{\sqrt{(s^2 \cdot \sin^2\theta_y \cos^2\theta_z + c^2 \cdot \sin^2\theta_z + s^2 \cdot \sin^2\theta_y \sin^2\theta_z + c^2 \cdot \cos^2\theta_z)}} \\ =& \frac{\sin\theta_x}{\sqrt{(s^2 \cdot \sin^2\theta_y + c^2)}} = \frac{\sin\theta_x}{\cos\theta_x} \qquad (3.8c)\end{aligned}$$