3.3　三次元の回転行列（２）

前項では姿勢角という結果から姿勢を表わす回転行列を求めた．ここでは姿勢角 θ_x，θ_y，θ_z 自体が未知となり，座標軸の回転角から三次元の回転式を導く．

3.3.1　オイラー角

オイラー角（Eulerian angles/Eulersche Winkeln）とは座標系を各座標軸周りに順次回転させて姿勢を求めるための３つの回転角を指す．回す軸の組み合わせと順番，すなわち順列は６通り（${}_3P_3$）存在する*1．ここでは z 軸周り，$\bar{y}$ 軸周り，$\bar{\bar{x}}$ 軸周りの順に回転を与える順列を示す．この順列のオイラー角による回転行列は単に回転式（3.1b)，(3.2b)，(3.3b）をその順に掛けることで得られる．この軸回転の順から，一般にこれを z-y-x 系のオイラー角と呼ぶ．x 軸周り，y 軸周り，z 軸周りの回転角をそれぞれ α，β，γ で表す．

演算の過程である式 (3.9) を見れば x 軸周りの回転前の回転行列は回転式 (3.5b) の回転行列と同じであることが分かる．

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\bar{\bar{\bar{x}}}\\ \bar{\bar{\bar{y}}}\\ \bar{\bar{\bar{z}}}\end{bmatrix}
&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&\sin\alpha\\0&-\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\cos\beta&0&-\sin\beta\\0&1&0\\\sin\beta&0&\cos\beta\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\cos\gamma&\sin\gamma&0\\-\sin\gamma&\cos\gamma&0\\0&0&1\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&\sin\alpha\\0&-\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\cos\beta\cos\gamma&\cos\beta\sin\gamma&-\sin\beta\\-\sin\gamma&\cos\gamma&0\\\sin\beta\cos\gamma&\sin\beta\sin\gamma&\cos\beta\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

最後の $\bar{\bar{x}}$ 周りの回転を加えれば

$$
\begin{bmatrix}\bar{\bar{\bar{x}}}\\ \bar{\bar{\bar{y}}}\\ \bar{\bar{\bar{z}}}\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
\cos\beta\cos\gamma & \cos\beta\sin\gamma & -\sin\beta\\
\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\cos\beta\\
\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}
\tag{3.10b}
$$

これを逆に解いて

$$
\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\\
\cos\beta\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma\\
-\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\bar{\bar{\bar{x}}}\\ \bar{\bar{\bar{y}}}\\ \bar{\bar{\bar{z}}}\end{bmatrix}
\tag{3.10a}
$$

*1 同じ軸を２度回転させる場合を含めるとさらに６通り

ここで式（2.2abc）を用いて座標系 O-$\bar{\bar{\bar{x}}}\bar{\bar{\bar{y}}}\bar{\bar{\bar{z}}}$ の姿勢角の方向係数を調べる．

- 方位角/アジマス $\theta_z = \gamma$

$$\tan\theta_z = \frac{m_1}{l_1} = \frac{\cos\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} \tag{3.11a}$$

- 傾斜角/ピッチ $\theta_y = \beta$

$$\tan\theta_y = \frac{-n_1}{\sqrt{(l_1{}^2 + m_1{}^2)}} = \frac{-(-\sin\beta)}{\sqrt{(\cos^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\beta\sin^2\gamma)}} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \tag{3.11b}$$

- 傾斜角/ロール $\theta_x \neq \alpha$

$$\begin{aligned}\tan\theta_x =& \frac{n_2}{\sqrt{(l_2^2 + m_2^2)}}\\ =& \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sqrt{(\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\gamma + \cos^2\alpha\sin^2\gamma + \sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma + \cos^2\alpha\cos^2\gamma)}}\\ =& \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sqrt{(\sin^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha)}}\\ =& \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sqrt{(1 - \sin^2\alpha\cos^2\beta)}}\end{aligned} \tag{3.11c}$$

式（3.11ab）を用いて式（3.11c）を $\sin\alpha$ について解くと

$$\sin\alpha = \frac{\sin\theta_x}{\cos\theta_y} \tag{3.12}$$

となり，これは式（3.6ab），式（3.7ab）で導入したパラメーター s に等しい．従って

$$s = \sin\alpha, \quad c = \cos\alpha \quad \left(= \sqrt{\left(1 - s^2\right)}\right) \tag{3.13}$$

この等式は式 (3.7ab) と式 (3.10ab) の対応要素を比較することによっても得られる．

式 (3.12) と式 (3.13) により姿勢角 θ_x，θ_y，θ_z と回転角 α，β，γ の相互変換が可能になる．式（3.10ab）を書き直せば

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y\cos\theta_z & \sin\alpha\sin\theta_y\cos\theta_z - \cos\alpha\sin\theta_z & \cos\alpha\sin\theta_y\cos\theta_z + \sin\alpha\sin\theta_z \\ \cos\theta_y\sin\theta_z & \sin\alpha\sin\theta_y\sin\theta_z + \cos\alpha\cos\theta_z & \cos\alpha\sin\theta_y\sin\theta_z - \sin\alpha\cos\theta_z \\ -\sin\theta_y & \sin\alpha\cos\theta_y & \cos\alpha\cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \tag{3.14a}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y\cos\theta_z & \cos\theta_y\sin\theta_z & -\sin\theta_y \\ \sin\alpha\sin\theta_y\cos\theta_z - \cos\alpha\sin\theta_z & \sin\alpha\sin\theta_y\sin\theta_z + \cos\alpha\cos\theta_z & \sin\alpha\cos\theta_y \\ \cos\alpha\sin\theta_y\cos\theta_z + \sin\alpha\sin\theta_z & \cos\alpha\sin\theta_y\sin\theta_z - \sin\alpha\cos\theta_z & \cos\alpha\cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3.14b}$$

となり式（3.14ab）は導入が異なるだけで式（3.7ab）と同一であることが分かる．もちろんこれは z-y-x 系のオイラー角とここで定義した姿勢角についてのみ成り立つ．