

## 4.4 測量への応用

方位を測定する特殊な手段として GPS (Global Positioning System) を利用したシステムがある。ここで方位とは真北からの角度を示す。物体に水平に固定された平盤上に複数の GPS センサーを設置して、その測位情報から平盤ひいては物体の方位を知ることができる。GPS による測定にはセンチメートルレベルの誤差があるので、その影響を最小限に抑えて方位を知る統計的手法を導く。

### 4.4.1 座標系の定義

平盤に固定されたローカル座標系  $O-\bar{x}\bar{y}$  を考える。各 GPS の設置位置はこの座標系に関する座標で表すものとする。この GPS の位置は設計値なのでその座標を真値として扱う。また個々の GPS からは緯度・経度による測位情報が返り、それから地球に固定された文字通りのグローバル座標系  $O-xy$  に関する座標を計算する。これらは測定値であり誤差を含むので統計的な処理が必要になる。

測位情報を北  $x$  軸、東  $y$  軸となるように地図情報に変換して、方位を北を基準にして時計回りの昇順で表す。

### 4.4.2 最小二乗法による演算

一般に回転式は両辺の一方の座標が既知で他方の座標が未知となるが、回転式の両辺の座標が既知で、回転行列の回転角度だけが未知になる。統計的には各 GPS の測定条件が共通ならば基数が多い程、測定精度が上がる。2 基 1 対で既に解析解が得られるが、統計に必要な最低限の数として 3 基とする<sup>\*1</sup>。

それぞれの GPS のセンサーの座標を定義する。

- グローバル座標系に関する座標 (測定値で誤差がある):

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

- ローカル座標系に関する座標 (設計値で真値):

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1), (\bar{x}_2, \bar{y}_2), (\bar{x}_3, \bar{y}_3)$$

---

<sup>\*1</sup> 統計的意味を持たすには本来 4 基以上必要

$z$  軸周りの回転式を 2 次元に変更して用いる。回転角は 3 次元の場合と同様、 $x$  軸が  $y$  軸に向かう方向を正とする。

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \leftarrow (3.1b)$$

測定値の中から任意の 1 対  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  を選ぶ。紙面の都合で行列を転置して次のように書き直す。

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \end{bmatrix}$$

他の 2 対の測定点を加えて拡張すれば

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2 & \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_3 & \bar{y}_1 - \bar{y}_3 \end{bmatrix}$$

さらに移項して

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2 & \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_3 & \bar{y}_1 - \bar{y}_3 \end{bmatrix} = 0$$

ところが測定値  $(x_1, y_1)$  等は誤差を含むため、式の右辺はゼロにはならない。そこで右辺の誤差を  $\Delta x_1, \Delta y_1$  等と置けば

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2 & \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_3 & \bar{y}_1 - \bar{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 \\ \Delta x_3 & \Delta y_3 \end{bmatrix} \quad (4.4.1a)$$

と書ける。ここで回転行列内の三角関数は  $C \simeq \cos \omega$ ,  $S \simeq \sin \omega$  と置いて変数とした。

これを行列に置き換えれば

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{R} - \mathbf{B} = \Delta \mathbf{d} \quad (4.4.1b)$$

最小二乗法によれば  $\mathbf{R}$  の最確値は誤差  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$  および  $\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3$  の二乗和

$$\begin{aligned} S_x &= \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \\ S_y &= \Delta y_1^2 + \Delta y_2^2 + \Delta y_3^2 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

を最小にする  $\mathbf{R}$  である。それはこの二乗和  $S_x, S_y$  を  $C, S$  で偏微分してゼロと置いた

$$\frac{\partial S_x}{\partial C} = 0, \quad \frac{\partial S_y}{\partial S} = 0$$

の解として得られる。式 (4.4.1a) を用いて式 (4.4.2) を変数  $x$  および  $y$  で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial S_x}{\partial C} &= \frac{\partial S_x}{\partial \Delta x_1} \cdot \frac{\partial \Delta x_1}{\partial C} + \frac{\partial S_x}{\partial \Delta x_2} \cdot \frac{\partial \Delta x_2}{\partial C} + \frac{\partial S_x}{\partial \Delta x_3} \cdot \frac{\partial \Delta x_3}{\partial C} \\ &= \Delta x_1 (x_2 - x_1) + \Delta x_2 (x_3 - x_2) + \Delta x_3 (x_1 - x_3) = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S_y}{\partial S} &= \frac{\partial S_y}{\partial \Delta y_1} \cdot \frac{\partial \Delta y_1}{\partial S} + \frac{\partial S_y}{\partial \Delta y_2} \cdot \frac{\partial \Delta y_2}{\partial S} + \frac{\partial S_y}{\partial \Delta y_3} \cdot \frac{\partial \Delta y_3}{\partial S} \\ &= \Delta y_1 (y_2 - y_1) + \Delta y_2 (y_3 - y_2) + \Delta y_3 (y_1 - y_3) = 0 \end{aligned}$$

を得る。これらを整理して行列を用いて表すと

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 \\ \Delta x_3 & \Delta y_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.4.3a)$$

再び記号に置き換えれば

$$\mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{d} = 0 \quad (4.4.3b)$$

と書ける\*2。

ここで式 (4.4.1b) の両辺に左から  $\mathbf{A}^T$  を掛けると

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{d} \quad (4.4.4)$$

となる。しかし式 (4.4.3b) によれば式 (4.4.4) の右辺はゼロだから次式を得る。

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$$

成分表示に戻すと

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2 & \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_3 & \bar{y}_1 - \bar{y}_3 \end{bmatrix} \quad (4.4.5) \end{aligned}$$

---

\*2 以降、最小二乗法による近似式なので厳密には等号 ”=” は使えない

行列積を実施すれば式 (4.4.5) は次のように集約できる.

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

左辺の行列の対角要素は  $f_{12} = f_{21}$  であるから

$$\begin{aligned} C &= \frac{g_{11} + g_{22}}{f_{11} + f_{22}} \\ S &= \frac{g_{21} - g_{12}}{f_{11} + f_{22}} \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

これを三角関数に戻す

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{C}{\sqrt{C^2 + S^2}} \\ \sin \omega &= \frac{S}{\sqrt{C^2 + S^2}} \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

方位は

$$\omega = \arctan \frac{\sin \omega}{\cos \omega} \quad (4.4.9)$$

と求まる\*3.

なお式 (4.4.5) は  $n$  対の式に一般化できる

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & \cdots & x_1 - x_n \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & \cdots & y_1 - y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ \cdots & \cdots \\ x_1 - x_n & y_1 - y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & \cdots & x_1 - x_n \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & \cdots & y_1 - y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2 & \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \\ \cdots & \cdots \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_n & \bar{y}_1 - \bar{y}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### 4.4.3 架空データによる検算

式の導入の前提として平盤上の GPS センサーは精密に固定され、その座標を真値とした。ところが測量用の GPS の精度は縦にした卵 1 個分の分解能と言われている。この精

\*3 数値計算では  $\cos \omega$ ,  $\sin \omega$  の二値で角度を表現する場合もある

度の対比を再現するため、グローバル座標系に関する座標を cm 単位で、ローカル座標系に関する座標を mm 単位に丸めた。

それぞれ、I 字形 2 基，正三角形 3 基，正方形 4 基に配置した GPS を正方向に 40 度回転させた測定データ（グローバル座標系に関する座標）を収録した状態を模擬する。辺の長さは一律 346mm とした。

方位をそれぞれ度分秒に変換して表すと

$$\omega_d = 0.694007 \frac{180}{\pi} \simeq 39^\circ 45' 49.8'' \quad \text{I 字形 2 基}$$

$$\omega_d = 0.697740 \frac{180}{\pi} \simeq 39^\circ 58' 39.2'' \quad \text{正三角形 3 基}$$

$$\omega_d = 0.698439 \frac{180}{\pi} \simeq 40^\circ 01' 03.3'' \quad \text{正方形 4 基}$$

この程度のサンプル数では大数の定理に従ったとまでは言えないものの，測位点の数に比例して精度が上がるのが分かる。ちなみに正方形 4 基の誤差 1'（分）は勾配 0.029/100（100m 当たり 29mm）に等しい。しかしこれは，誤差を含むはずの GPS の固定位置を真値として扱った結果であり，実際にはこのような高精度はあり得ない。

正確な GPS 測定には事前の準備が必要であるが，動的に真北からの方位を測定する手段としてこれ以外の方法は多くはない。