

## 4.5 土木計算への応用

海洋掘削や土質改良など地中に穴を掘る工事に使われる掘削機がある。その中で支点が上部にある懸垂式と呼ばれるタイプでは、リーダーなどの地中内の支えがないため掘削中にドリルの先端が前後左右に移動する可能性がある。目視できないドリル先端の位置を知るために、互いに直角に置いた傾斜計で傾斜角を計測することがある。特に深く掘削する工事では軸も長くなるので軸周りの回転が生まれる。その場合には回転を計測するためにドリル先端近くにジャイロスコープを追加する（特許情報）。

傾斜計とジャイロスコープの計測値からドリル先端の位置を求める計算式を導く。これまでの問題と異なり、被検物を外部から観測できないので計測値だけが頼りになる。

### 4.5.1 座標系の定義

座標原点を共通にとったグローバル座標系とローカル座標系を定義する。 $xy$  平面を水平面、掘削機の前方向など基準となる方向を  $x$  軸、その右方向を  $y$  軸とする。鉛直方向の  $z$  軸はドリルシャフトの中心線と一致する。初期状態では共通座標であるが、ローカル座標系はドリルに固定されているので、掘削時には  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  の傾斜、(場合によっては)  $\omega_z$  の回転が生じるため姿勢が変わる (Fig.5)。座標原点はドリル先端から任意の距離  $L$  を取った位置とする。

本来、ドリルシャフトを複数のセグメントに分け積算計算をして貫入の軌跡をたどるが、ここでは有限回転問題を扱っているので先端のセグメントのみを解析の対象とする。ドリルシャフトが特別に短い工事ではこれを剛体と見なせるので、ドリル支点を原点とすることもできる。

ドリル先端のグローバル座標系  $O-xyz$  に関する座標  $\{x_1, y_1, z_1\}$  が未知で、ローカル座標系  $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  に関する座標が既知なのでこれを初期状態のグローバル座標系に関する座標  $\{x_0, y_0, z_0\}$  とすれば、座標成分の変換式 (2.1a') を適合式として使える。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (2.1a')$$

### 4.5.2 $z$ 軸周りの回転角がゼロのときの回転行列

$z$  軸周りの回転角  $\omega_z$  は相対角なので、一義的な解は得られない。各軸の回転の経路は無限に存在するので解も無限に存在する。しかし  $z$  軸周りの回転角がゼロのときの姿勢は定める必要がある。1 軸回転すなわちロドリゲスの回転公式 (3.17a) が成り立つよう

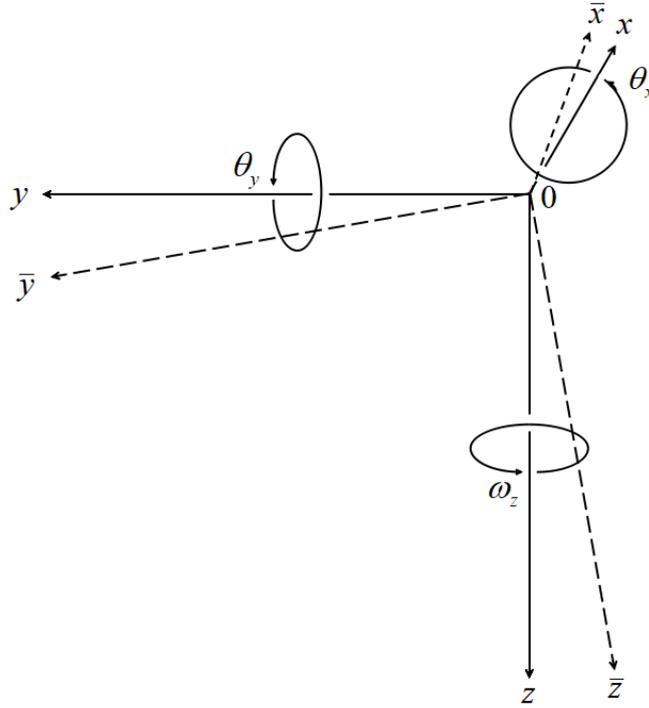


Fig.5 グローバル座標系 O-xyz とローカル座標系 O-x̄ȳz̄

に,  $\omega_z = 0$  を維持しながら  $\theta_x, \theta_y$  傾斜した姿勢を求める. その解は同式に  $\omega_z = 0$  すなわち  $n_z = 0$  と代入することで簡単に得られる. ここではそれを基準姿勢と呼ぶ.

基準姿勢の回転行列を 3 姿勢角による回転式 (3.7a) の回転行列に当てはめる. 適合式 (2.1a') を参考にしながら, 両式の回転行列を比較する (必要な成分のみ):

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} && \leftarrow (2.1a') \\
 = & \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} && \leftarrow (3.7a) \\
 = & \begin{bmatrix} \cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega) & n_x n_y(1 - \cos \omega) & n_y \sin \omega \\ n_x n_y(1 - \cos \omega) & \cos \omega + n_y^2(1 - \cos \omega) & -n_x \sin \omega \\ -n_y \sin \omega & n_x \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} && \leftarrow (3.17a)
 \end{aligned}$$

両行列の共通成分  $\{ n_1, n_2, n_3 \}$  に着目すると

$$\begin{aligned}
 n_y \sin \omega &= \sin \theta_y \\
 n_x \sin \omega &= \sin \theta_x \\
 \cos \omega &= c \cdot \cos \theta_y
 \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

と対応しているのが分かる．これから各変数は

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\sin \theta_x}{\sqrt{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y}} \\ n_y &= \frac{-\sin \theta_y}{\sqrt{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y}} \\ \cos \omega &= \sqrt{1 - (\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y)} \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

と定まる．基準姿勢のロドリゲスの回転公式は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega) & n_x n_y(1 - \cos \omega) & \sin \theta_y \\ n_x n_y(1 - \cos \omega) & \cos \omega + n_y^2(1 - \cos \omega) & -\sin \theta_x \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4.5.3a')$$

となり，これはそのまま掘削時に軸周りの回転がないシステムに使える．

#### 4.5.3 $z$ 軸周りの回転角がゼロではないときの回転行列

基準姿勢に  $\omega_z$  に相当する姿勢の増分を加えて最終姿勢とする\*1．まず基準姿勢のアジマスは式 (4.5.3a') の方向余弦成分を式 (2.2a) に代入すれば得られる．

$$\theta_z|_{\omega_z=0} = \arctan \frac{m_1}{l_1} = \arctan \frac{n_x n_y(1 - \cos \omega)}{\cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega)} \quad (\neq 0) \quad (4.5.4)$$

このように  $\omega_z = 0$  であっても  $x$  軸と  $y$  軸に傾斜がある限り  $\theta_z = 0$  にはならないことが分かる．これに  $z$  軸周りの回転角ヨウ  $\omega_z$  を加算して方位角アジマス  $\theta_z$  とする．

$$\theta_z = \theta_z|_{\omega_z=0} + \omega_z \quad (4.5.5)$$

最終姿勢の回転式は，全ての姿勢角を式 (3.7a) に代入して

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z - c \cdot \sin \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z + s \cdot \sin \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z + c \cdot \cos \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z - s \cdot \cos \theta_z \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4.5.6a')$$

あるいは  $z$ - $y$ - $x$  系のオイラー角による回転式 (3.14a) に代入して

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & \sin \alpha \sin \theta_y \cos \theta_z - \cos \alpha \sin \theta_z & \cos \alpha \sin \theta_y \cos \theta_z + \sin \alpha \sin \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & \sin \alpha \sin \theta_y \sin \theta_z + \cos \alpha \cos \theta_z & \cos \alpha \sin \theta_y \sin \theta_z - \sin \alpha \cos \theta_z \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & \cos \alpha \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4.5.7a')$$

\*1 これは解の可能性のひとつであるので近似解ではない

ここで

$$s = \frac{\sin \theta_x}{\cos \theta_y}, \quad c = \sqrt{(1 - s^2)}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \theta_x}{\cos \theta_y}, \quad \cos \alpha = \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)}$$

$$|\theta_x| + |\theta_y| \leq \frac{\pi}{2}$$

とした。

回転式 (4.5.6a') と回転式 (4.5.7a') はアプローチが異なるだけで同一である。

#### 4.5.4 ドリル先端の計算式

座標原点からドリルの先端までの長さを  $L$  とした。よって初期状態のドリル先端の座標は

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{bmatrix}$$

であるから、これを式 (4.5.3a') に代入すれば、 $z$  軸周りの回転角がゼロのときのドリル先端の座標が得られ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L \cdot \begin{bmatrix} \sin \theta_y \\ -\sin \theta_x \\ \cos \omega \end{bmatrix} \quad (4.5.8)$$

式 (4.5.6a') に代入すれば、 $z$  軸周りの回転角がゼロではないときのドリル先端の座標が得られる

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L \cdot \begin{bmatrix} c \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z + s \cdot \sin \theta_z \\ c \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z - s \cdot \cos \theta_z \\ c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (4.5.9)$$

または式 (4.5.7a') に代入しても同じ計算式を得る。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \theta_y \cos \theta_z + \sin \alpha \sin \theta_z \\ \cos \alpha \sin \theta_y \sin \theta_z - \sin \alpha \cos \theta_z \\ \cos \alpha \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (4.5.10)$$

#### 4.5.5 架空データによる検算

実測データがないので、ドリル先端の実際の計算はできない。そこでここでは基準姿勢のアジマスを求める式 (4.5.4) の検算をする。同じ傾斜角を与えて3姿勢角による回転式とロドリゲスの回転公式の数値を比較をする。

傾斜角を  $\theta_{xd} = 4$  度,  $\theta_{yd} = 3$  度 (「d」は単位が度であることを示す) とする\*2。もちろん基準姿勢のヨウは  $\omega_z = 0$  である。

まず

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y &= \sin^2\left(4\frac{\pi}{180}\right) + \sin^2\left(3\frac{\pi}{180}\right) \\ &= 0.0076\end{aligned}$$

なので式 (4.5.2) から

$$\begin{aligned}n_x &= \frac{\sin \theta_x}{\sqrt{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y}} \\ &= 0.7999\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n_y &= \frac{-\sin \theta_y}{\sqrt{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y}} \\ &= -0.6001\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega &= \arccos \sqrt{1 - (\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y)} = \arccos(0.9962) \\ &= 0.0873 \quad (\simeq 5^\circ 00' 07'')\end{aligned}$$

これを基準姿勢ロドリゲスの回転公式 (4.5.3a') に代入すると

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega) & n_x n_y(1 - \cos \omega) & \sin \theta_y \\ n_x n_y(1 - \cos \omega) & \cos \omega + n_y^2(1 - \cos \omega) & -\sin \theta_x \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9986 & 0.0018 & 0.0523 \\ 0.0018 & 0.9976 & -0.0698 \\ -0.0523 & 0.0698 & 0.9962 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4.5.11a')\end{aligned}$$

ところが式 (4.5.4) から方位角アジマスが求まり。

$$\begin{aligned}\theta_z|_{\omega_z=0} &= \arctan \frac{n_x n_y(1 - \cos \omega)}{\cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega)} = \arctan \frac{0.0018}{0.9986} \\ &= 0.0018 \quad (\simeq 0^\circ 00' 06'')\end{aligned}$$

---

\*2 実際にはこれ程、傾斜しない

与えたデータ  $\theta_{xd} = 4$  度,  $\theta_{yd} = 3$  度とここで計算した  $\theta_z = 0.0018$  を 3 姿勢角による回転式 (4.5.6a') に代入すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z - c \cdot \sin \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z + s \cdot \sin \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z + c \cdot \cos \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z - s \cdot \cos \theta_z \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9986 & 0.0018 & 0.0523 \\ 0.0018 & 0.9976 & -0.0698 \\ -0.0523 & 0.0698 & 0.9962 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.12a')$$

となる。これはロドリゲスの回転公式から求めた式 (4.5.11a') と数值的に等しい。