

1 基本定義事項

1.1 座標系の定義

右手系の直交座標系で説明するが、回転方向に注意すれば同じ式を左手系に関するものとして使える。右手系とは右手の親指を x 軸，人差し指を y 軸，中指を z 軸として指を互いに直交させてできる座標系*¹を示す。通常， z 軸を天頂軸または鉛直軸， xy 平面を水平面とする。

工学的には一般に，姿勢の基準となる座標系をグローバル座標系*²と呼び，それに相対して姿勢が変化した座標系をローカル座標系*³と呼ぶ。

問題の解決のため回転による座標変換を繰り返すことがある。そのとき変換の数だけのローカル座標ができるが，グローバル座標系は基本的にひとつとする。相対的にはそれぞれ変換前後の座標系を旧座標系，新座標系とも呼ぶ。特に断りのない限り，グローバル座標系を $O-xyz$ と無修飾文字で表し，ローカル座標系を $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ などと修飾文字で表す。

何をグローバル座標系とするかは問題に応じて決定する。一般には回転しない対象物または回転前の対象物に固定するが，船舶，航空機などの姿勢制御では航行，飛行する方向にその特定の座標軸を固定することもある。特殊な例として，コンピューターグラフィックスの手法では，グローバル座標系を人の視覚に固定して，逆に背景の方を動かす。これは表示モニターの視界が固定されていることによる。

1.2 回転角の定義

回転角は傾く軸の名称ではなく，回る軸の名称で呼ぶ*⁴。海運用語から借りて， x 軸周りの回転をロール (Roll)/ ω_x ， y 軸周りの回転をピッチ (Pitch)/ ω_y ， z 軸周りの回転をヨウ (Yaw)/ ω_z と呼ぶ。本来，これらは回転方向に依存しない動揺（あっちこっちの方向に揺れる）を示す用語であるが，ここでは回転方向を定義する。

座標軸を座標原点から伸ばしたねじに見立てれば右手系の座標系 (Fig.1) では右ねじの進む方向に回転し，左手系の座標系では左ねじの進む方向に回転する。

*¹ 単に数学座標系とも

*² 全体座標系，ワールド座標系とも

*³ 局所座標系，ボディ座標系とも

*⁴ 多くの測量現場では傾く軸で回転角が呼ばれている

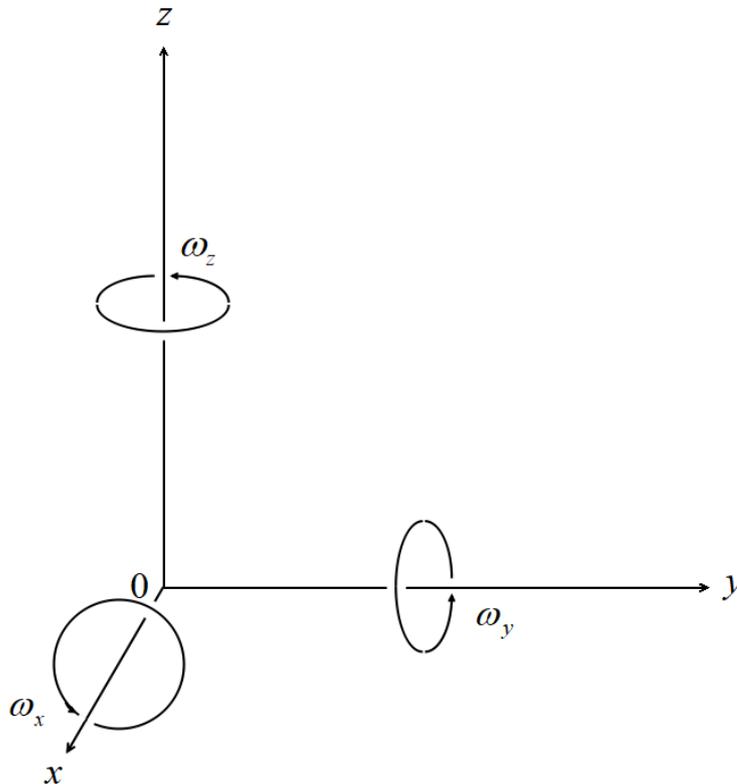


Fig.1 回転角の名称と方向（右手系の例）

1.3 姿勢角の定義

姿勢を表す手段として、1 方位角および2 傾斜角*5がある。これらをまとめて姿勢角と呼ぶ。回転角の定義に準じて傾く軸の名称ではなく、回る軸の名称で呼ぶが、記号は ω の代わりに θ を用いる。

xy 平面を水平面、必然的に z 軸を天頂軸または鉛直軸として、 xy 平面からの y 軸の x 軸周りの傾斜角をロール θ_x 、同様に xy 平面からの x 軸の y 軸周りの傾斜角をピッチ θ_y と呼ぶ。方位角だけ特別に、 zx 平面からの x 軸の z 軸周りの回転角と定義して、ヨウではなくアジマス (Azimuth)/ θ_z と呼ぶ。

回転角 ω は純粋に軸の回転の量であることに對し、姿勢角 θ はグローバル座標系の軸が作る面に対するローカル座標系の軸の（正負のある）成す角と言える。回転角と姿勢角が一致する場合もある。

*5 「傾き」は数学的には正接 (tan) で表す

2 基本式

2.1 座標の3軸回転

移動体に固定した座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ が初め空間に固定した座標系 $O-xyz$ に一致していたものとする。その座標軸を、原点を固定してその周りに回転して新座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ を得たとき、任意点 P の両座標系に関する座標を求める。

座標系 $O-xyz$ のそれぞれの座標軸に沿う単位ベクトルを $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, 同様に新座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ のそれぞれの座標軸に沿う単位ベクトルを $\bar{\mathbf{e}}_x, \bar{\mathbf{e}}_y, \bar{\mathbf{e}}_z$ とする。さらにこの新座標系の座標軸の方向余弦を $\{l_1, m_1, n_1\}, \{l_2, m_2, n_2\}, \{l_3, m_3, n_3\}$ とすれば

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{e}}_x &= l_1\mathbf{e}_x + m_1\mathbf{e}_y + n_1\mathbf{e}_z \\ \bar{\mathbf{e}}_y &= l_2\mathbf{e}_x + m_2\mathbf{e}_y + n_2\mathbf{e}_z \\ \bar{\mathbf{e}}_z &= l_3\mathbf{e}_x + m_3\mathbf{e}_y + n_3\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

と書ける。ところが任意点 P の位置ベクトルを両座標系に関して表せば

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \bar{x}\bar{\mathbf{e}}_x + \bar{y}\bar{\mathbf{e}}_y + \bar{z}\bar{\mathbf{e}}_z \\ \overrightarrow{OP} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}& \bar{x}\bar{\mathbf{e}}_x + \bar{y}\bar{\mathbf{e}}_y + \bar{z}\bar{\mathbf{e}}_z \\ &= \bar{x}(l_1\mathbf{e}_x + m_1\mathbf{e}_y + n_1\mathbf{e}_z) + \bar{y}(l_2\mathbf{e}_x + m_2\mathbf{e}_y + n_2\mathbf{e}_z) + \bar{z}(l_3\mathbf{e}_x + m_3\mathbf{e}_y + n_3\mathbf{e}_z) \\ &= (l_1\bar{x} + l_2\bar{y} + l_3\bar{z})\mathbf{e}_x + (m_1\bar{x} + m_2\bar{y} + m_3\bar{z})\mathbf{e}_y + (n_1\bar{x} + n_2\bar{y} + n_3\bar{z})\mathbf{e}_z \\ &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

単位ベクトルの係数を比較すれば

$$\begin{aligned}x &= l_1\bar{x} + l_2\bar{y} + l_3\bar{z} \\ y &= m_1\bar{x} + m_2\bar{y} + m_3\bar{z} \\ z &= n_1\bar{x} + n_2\bar{y} + n_3\bar{z}\end{aligned}$$

または行列を用いて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (2.1a)$$

と書ける．座標軸に沿った方向余弦は互いに直交し，それぞれのノルムは 1 であるから，この係数行列の要素を転置すれば逆行列になる．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1b)$$

回転式 (2.1a) と (2.1b) は関係式として同じ意味を持つ．もちろん方向余弦と座標は未知数であり，それぞれの有限回転問題に当てはめて求める必要がある．ここではこれを回転式，その 3 行 3 列の行列 ([3,3] と書く) を回転行列と呼ぶ．

命題どおり $\{x, y, z\}$ は空間に固定した座標系 $O-xyz$ に関する座標であり， $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ は回転後の移動体に固定した座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ に関する座標である．点 P が空間に固定されているとすると回転式 (2.1ab) の両辺の座標の一方は移動体に固定された座標系に関する座標になる．従ってこれらの回転式は座標系の変換式となる．

しかし座標系 $O-xyz$ と座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ が初めに一致していたことは，その状態の座標系 $O-xyz$ に関する座標 $\{x_0, y_0, z_0\}$ は座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ に関する座標 $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ と共通である．点 P が移動体に固定されているとすると回転式 (2.1ab) の両辺の座標はどちらも空間に固定された座標系に関する座標成分になる．従って回転式 (2.1a) は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (2.1a')$$

とも書ける．同様に回転式 (2.1b) も

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (2.1b')$$

と書ける．座標系は変わらず座標成分が変わるので回転式 (2.1a') と (2.1b') は座標成分の変換式となる．

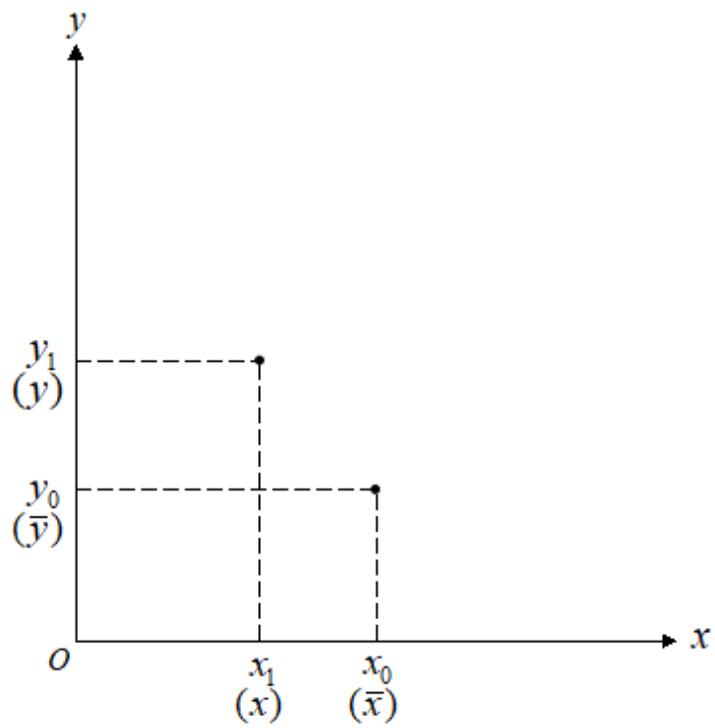
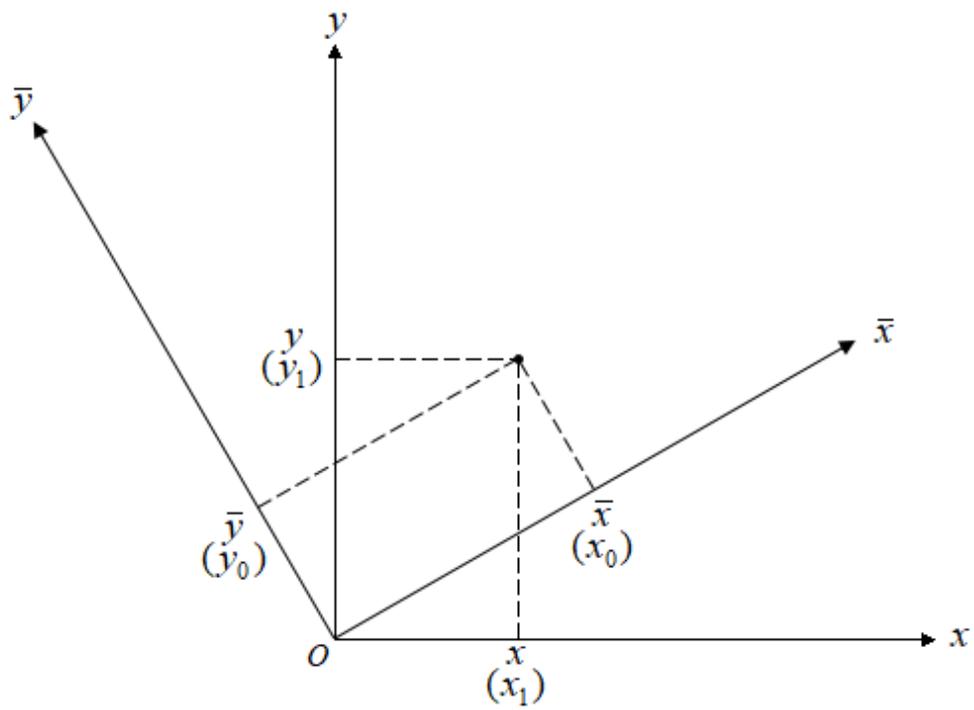


Fig.2 座標系の変換と座標成分の変換

2.2 姿勢角と回転行列

回転式 (2.1ab) のような回転行列が与えられたとき、方向余弦から成るその行列要素から回転後の新座標系の姿勢角を知ることができる。回転角が

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_{x \wedge y \wedge z} < \frac{\pi}{2}$$

である場合、回転行列の要素と方向係数（傾き）の間に以下の関係式が成り立つ*¹。

- 方位角/アジマス θ_z

新座標系の \bar{x} 軸の方向余弦は $\{ l_1, m_1, n_1 \}$ であるから、 zx 平面からの \bar{x} 軸の z 軸周りの方向係数は：

$$\tan \theta_z = \frac{m_1}{l_1} \tag{2.2a}$$

- 傾斜角/ピッチ θ_y

同じ \bar{x} 軸の方向余弦を用いて、 xy 平面からの x 軸の y 軸周りの方向係数は：

$$\tan \theta_y = \frac{-n_1}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2)}} \tag{2.2b}$$

- 傾斜角/ロール θ_x

新座標系の \bar{y} 軸の方向余弦は $\{ l_2, m_2, n_2 \}$ であるから、 xy 平面からの y 軸の x 軸周りの方向係数は：

$$\tan \theta_x = \frac{n_2}{\sqrt{(l_2^2 + m_2^2)}} \tag{2.2c}$$

*¹ 単に”tan”を使うことによる制約

3 回転行列

3.1 二次元の回転行列

二次元の1軸回転の基本回転式を導く．三次元の回転行列に発展させるため3行3列の三次元行列で表現する．

3.1.1 1座標軸周りに回転

移動体に固定した座標系が初め空間に固定した座標系 $O-xyz$ に一致していたものとする．その1座標軸を，原点を固定してその周りに回転して新座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ を得たときの任意点 P の両座標系に関する座標を求める．

回転して得られた座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ のそれぞれの座標軸の方向余弦を求める．ここでは例えば x 軸に対する \bar{x} の回転角を $(\bar{x}x)$ と書く．

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(\bar{x}x) & m_1 &= \cos(\bar{x}y) & n_1 &= \cos(\bar{x}z) \\ l_2 &= \cos(\bar{y}x) & m_2 &= \cos(\bar{y}y) & n_2 &= \cos(\bar{y}z) \\ l_3 &= \cos(\bar{z}x) & m_3 &= \cos(\bar{z}y) & n_3 &= \cos(\bar{z}z) \end{aligned}$$

- z 軸周りに ω_z 回転

回転角から方向余弦を求めて

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos \omega_z & m_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_z\right) = \sin \omega_z & n_1 &= \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ l_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega_z\right) = -\sin \omega_z & m_2 &= \cos \omega_z & n_2 &= \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ l_3 &= \cos \frac{\pi}{2} = 0 & m_3 &= \cos \frac{\pi}{2} = 0 & n_3 &= \cos 0 = 1 \end{aligned}$$

これらを回転式 (2.1ab) に代入すると次式が得られる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_z & -\sin \omega_z & 0 \\ \sin \omega_z & \cos \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (3.1a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_z & \sin \omega_z & 0 \\ -\sin \omega_z & \cos \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.1b)$$

また表記を変えて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_z & -\sin \omega_z & 0 \\ \sin \omega_z & \cos \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (3.1a')$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_z & \sin \omega_z & 0 \\ -\sin \omega_z & \cos \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (3.1b')$$

とも書ける.

他の軸周りの回転式も回転式 (3.1ab) の3変数対称式として得られる.

- y 軸周りに ω_y 回転

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_y & 0 & \sin \omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \omega_y & 0 & \cos \omega_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (3.2a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_y & 0 & -\sin \omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega_y & 0 & \cos \omega_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.2b)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_y & 0 & \sin \omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \omega_y & 0 & \cos \omega_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (3.2a')$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_y & 0 & -\sin \omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega_y & 0 & \cos \omega_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (3.2b')$$

- x 軸周りに ω_x 回転

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_x & -\sin \omega_x \\ 0 & \sin \omega_x & \cos \omega_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (3.3a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_x & \sin \omega_x \\ 0 & -\sin \omega_x & \cos \omega_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.3b)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_x & -\sin \omega_x \\ 0 & \sin \omega_x & \cos \omega_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (3.3a')$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_x & \sin \omega_x \\ 0 & -\sin \omega_x & \cos \omega_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (3.3b')$$

3.2 三次元の回転行列（1）

これまでの基本式を応用して姿勢角を与えて三次元の回転式を導く。

基本的に3姿勢角が既知でなければ姿勢は定まらない。しかし特定の軸の姿勢角をゼロと置くことで二次元の回転行列を組み合わせることで比較的容易に回転式を導くことができる。ここでは座標軸を軸毎に姿勢角で順次回転させて目標の姿勢角を持つ姿勢を得る。

3.2.1 x 軸周りの傾斜角がゼロ

姿勢角 $\theta_x = 0$, $\theta_y \neq 0$, $\theta_z \neq 0$ の回転式および回転行列を導く

第2.1項で述べたように、空間に固定したグローバル座標系 $O-xyz$ と移動体に固定したローカル座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ があって任意点 P の両座標系に関する座標を求める。しかし、どちらの座標系に関する座標を既知とするかによって二つのアプローチに分かれる。

■グローバル座標系に関する座標が既知

任意点 P はグローバル座標系に固定され、座標系が回転してもグローバル座標系に関する任意点 P の座標 $\{x, y, z\}$ は変化しないものとする。座標系回転後のローカル座標系に関する点 P の座標 $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ を求める。よって座標系はローカル座標系の座標軸周りに回転する。

まず、ローカル座標系の \bar{z} 軸（初めは z 軸と共通）周りに座標系を姿勢角 θ_z で回転させる。初めは両座標系は共通なのでグローバル座標系のヨウ/角 ω_z はアジマス/角 θ_z は一致し、 \bar{x} 軸と \bar{y} 軸は xy 平面上にある。回転式 (3.1b) をそのまま用いれば

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

と書ける。

次に、新座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ をローカル座標系の \bar{y} 軸周りに θ_y だけ回転させる。姿勢角 $\theta_x = 0$ なので \bar{y} 軸は xy 平面上に残る。回転式 (3.2b) を用いれば

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & \cos \theta_y \sin \theta_z & -\sin \theta_y \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ \sin \theta_y \cos \theta_z & \sin \theta_y \sin \theta_z & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{3.5b}
\end{aligned}$$

これを逆に解いて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & -\sin \theta_z & \sin \theta_y \cos \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & \cos \theta_z & \sin \theta_y \sin \theta_z \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \tag{3.5a}$$

■ローカル座標系に関する座標が既知で不変

任意点 P はローカル座標系に固定され、座標系が回転してもローカル座標系に関する座標 $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ は変化しないものとする。座標系回転後のグローバル座標系に関する点 P の座標 $\{x, y, z\}$ を求める。よって座標系はグローバル座標系の座標軸周りに回転する。

まず、グローバル座標系の y 軸（初めは \bar{y} 軸と共通）周りに座標系を姿勢角 θ_y で回転させる。回転式 (3.2a') を用いれば

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

と書ける。このとき \bar{z} 軸は zx 平面上にある。

次に、ローカル座標系 $0-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ をグローバル座標系の z 軸周りに θ_z だけ回転させる。

回転式 (3.1a') を用いれば

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & -\sin \theta_z & \sin \theta_y \cos \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & \cos \theta_z & \sin \theta_y \sin \theta_z \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \tag{3.5a'}
 \end{aligned}$$

これは回転式 (3.5a) に他ならない.

3.2.2 z 軸周りの方位角がゼロ

姿勢角 $\theta_x \neq 0$, $\theta_y \neq 0$, $\theta_z = 0$ の回転式および回転行列を導く.

ローカル座標系の \bar{x} 軸とグローバル座標系の各座標軸との関係を考える. アジマス $\theta_z = 0$ であるからアジマスの定義によれば x 軸は zx 平面に含まれる. また \bar{x} 軸は $y\bar{y}$ 平面に垂直で xy 平面から y 軸周りに θ_y だけ傾いている. よって \bar{x} 軸の方向余弦は

$$\begin{aligned}
 \{ l_1, m_1, n_1 \} &= \left\{ \cos \theta_y, \cos \frac{\pi}{2}, \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta_y \right) \right\} \\
 &= \{ \cos \theta_y, 0, -\sin \theta_y \} \quad \dots \bar{x} \text{ 軸}
 \end{aligned}$$

と定まる.

次に \bar{y} 軸は xy 平面から x 軸周りに θ_x だけ傾いているから

$$\begin{aligned}
 \{ l_2, m_2, n_2 \} &= \left\{ l_2, m_2, \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_x \right) \right\} \\
 &= \{ l_2, m_2, \sin \theta_x \}
 \end{aligned}$$

ただし, これは未知の成分 l_2 と m_2 を含む. \bar{x} 軸の方向余弦との内積は 0 だから

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = l_2 \cos \theta_y + 0 \cdot m_2 - \sin \theta_y \sin \theta_x = 0$$

よって

$$l_2 = \frac{\sin \theta_y \sin \theta_x}{\cos \theta_y}$$

さらに方向余弦のノルムは 1 だから

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = \frac{\sin^2 \theta_y \sin^2 \theta_x}{\cos^2 \theta_y} + m_2^2 + \sin^2 \theta_x = 1$$

よって

$$\begin{aligned} m_2 &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_x - \frac{\sin^2 \theta_y \sin^2 \theta_x}{\cos^2 \theta_y}} \\ &= \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_x}{\cos^2 \theta_y}} \end{aligned}$$

と定まるが、 \bar{y} 軸の方向余弦の y 成分は y 軸上正方向にあるから

$$m_2 = + \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_x}{\cos^2 \theta_y}}$$

と正となる。またこの式が成り立つためには傾斜角は次の条件を満たす必要がある。

$$|\theta_x| + |\theta_y| \leq \frac{\pi}{2}$$

以上から \bar{y} 軸の方向余弦は

$$\begin{aligned} \{ l_2, m_2, n_2 \} &= \left\{ \frac{\sin \theta_x}{\cos \theta_y} \sin \theta_y, \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_x}{\cos^2 \theta_y}}, \sin \theta_x \right\} \\ &= \{ s \cdot \sin \theta_y, c, \sin \theta_x \} \quad \dots \bar{y} \text{ 軸} \end{aligned}$$

ここで $s = \sin \theta_x / \cos \theta_y$, $c = \sqrt{1 - s^2}$ と置いた。

残りの \bar{z} 軸の方向余弦は、ここで求めた \bar{x} 軸と \bar{y} 軸の方向余弦の外積として得られる。

$$\begin{aligned} \{ l_3, m_3, n_3 \} &= \{ m_1 n_2 - n_1 m_2, n_1 l_2 - l_1 n_2, l_1 m_2 - m_1 l_2 \} \\ &= \{ -n_1 m_2, n_1 l_2 - l_1 n_2, l_1 m_2 \} \\ &= \{ c \cdot \sin \theta_y, -s, c \cdot \cos \theta_y \} \quad \dots \bar{z} \text{ 軸} \end{aligned}$$

以上をまとめると

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos \theta_y & m_1 &= 0 & n_1 &= -\sin \theta_y \\ l_2 &= s \cdot \sin \theta_y & m_2 &= c & n_2 &= \sin \theta_x \\ l_3 &= c \cdot \sin \theta_y & m_3 &= -s & n_3 &= c \cdot \cos \theta_y \end{aligned}$$

これらを式 (2.1ab) に代入する

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & s \cdot \sin \theta_y & c \cdot \sin \theta_y \\ 0 & c & -s \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (3.6a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ s \cdot \sin \theta_y & c & \sin \theta_x \\ c \cdot \sin \theta_y & -s & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.6b)$$

ただし

$$s = \frac{\sin \theta_x}{\cos \theta_y}, \quad c = \sqrt{(1 - s^2)}$$

$$|\theta_x| + |\theta_y| \leq \frac{\pi}{2}$$

パラメーター s , c の幾何的意味については後述する.

3.2.3 3 姿勢角による回転式

姿勢角 $\theta_x \neq 0$, $\theta_y \neq 0$, $\theta_z \neq 0$ の回転式および回転行列を導く

既に z 軸周りの方位角がゼロの場合の回転式は前項で求めた. これにアジマスの回転を加える. 回転式 (3.1b) と回転式 (3.6b) を用いるが回転させる順番に気を付ける.

グローバル座標系にアジマス θ_z の回転を先に与える.

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ に式 (3.6b) で傾斜角を考慮する.

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ s \cdot \sin \theta_y & c & \sin \theta_x \\ c \cdot \sin \theta_y & -s & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & \cos \theta_y \sin \theta_z & -\sin \theta_y \\ s \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z - c \cdot \sin \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z + c \cdot \cos \theta_z & \sin \theta_x \\ c \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z + s \cdot \sin \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z - s \cdot \cos \theta_z & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.7b)$$

これを逆に解いて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z - c \cdot \sin \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z + s \cdot \sin \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z + c \cdot \cos \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z - s \cdot \cos \theta_z \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (3.7a)$$

ただし

$$s = \frac{\sin \theta_x}{\cos \theta_y}, \quad c = \sqrt{(1 - s^2)}$$

$$|\theta_x| + |\theta_y| \leq \frac{\pi}{2}$$

以上で分かるように, 回転式 (3.7ab) は姿勢角から姿勢を求める一般式であって, x 軸周りの傾斜角 $\theta_x = 0$ と置けば, $s = 0$, $c = 1$ から回転式 (3.5ab) が, z 軸周りの傾斜

角 $\theta_z = 0$ と置けば, $\sin \theta_z = 0$, $\cos \theta_z = 1$ から回転式 (3.6ab) が得られる. 以降, 式 (3.7ab) を 3 姿勢角による回転式 と呼ぶ

ここで式 (2.2abc) を用いて座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ の姿勢角の方向係数を調べる.

- 方位角/アジマス θ_z

$$\tan \theta_z = \frac{m_1}{l_1} = \frac{\cos \theta_y \sin \theta_z}{\cos \theta_y \cos \theta_z} = \frac{\sin \theta_z}{\cos \theta_z} \quad (3.8a)$$

- 傾斜角/ピッチ θ_y

$$\tan \theta_y = \frac{-n_1}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2)}} = \frac{-(-\sin \theta_y)}{\sqrt{(\cos^2 \theta_y \cos^2 \theta_z + \cos^2 \theta_y \sin^2 \theta_z)}} = \frac{\sin \theta_y}{\cos \theta_y} \quad (3.8b)$$

- 傾斜角/ロール θ_x

$$\begin{aligned} \tan \theta_x &= \frac{n_2}{\sqrt{(l_2^2 + m_2^2)}} \\ &= \frac{\sin \theta_x}{\sqrt{(s^2 \cdot \sin^2 \theta_y \cos^2 \theta_z + c^2 \cdot \sin^2 \theta_z + s^2 \cdot \sin^2 \theta_y \sin^2 \theta_z + c^2 \cdot \cos^2 \theta_z)}} \\ &= \frac{\sin \theta_x}{\sqrt{(s^2 \cdot \sin^2 \theta_y + c^2)}} = \frac{\sin \theta_x}{\cos \theta_x} \end{aligned} \quad (3.8c)$$

3.3 三次元の回転行列（2）

前項では姿勢角という結果から姿勢を表わす回転行列を求めた．ここでは姿勢角 θ_x , θ_y , θ_z 自体が未知となり，座標軸の回転角から三次元の回転式を導く．

3.3.1 オイラー角

オイラー角（Eulerian angles/Eulersche Winkeln）とは座標系を各座標軸周りに順次回転させて姿勢を求めるための3つの回転角を指す．回す軸の組み合わせと順番，すなわち順列は6通り（ ${}_3P_3$ ）存在する*1．ここでは z 軸周り， \bar{y} 軸周り， \bar{x} 軸周りの順に回転を与える順列を示す．この順列のオイラー角による回転行列は単に回転式 (3.1b), (3.2b), (3.3b) をその順に掛けることで得られる．この軸回転の順から，一般にこれを z - y - x 系のオイラー角と呼ぶ． x 軸周り， y 軸周り， z 軸周りの回転角をそれぞれ α , β , γ で表す．

演算の過程である式 (3.9) を見れば x 軸周りの回転前の回転行列は回転式 (3.5b) の回転行列と同じであることが分かる．

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.9) \end{aligned}$$

最後の \bar{x} 周りの回転を加えれば

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.10b)$$

これを逆に解いて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \\ -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (3.10a)$$

*1 同じ軸を2度回転させる場合を含めるとさらに6通り

ここで式 (2.2abc) を用いて座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ の姿勢角の方向係数を調べる。

- 方位角/アジマス $\theta_z = \gamma$

$$\tan \theta_z = \frac{m_1}{l_1} = \frac{\cos \beta \sin \gamma}{\cos \beta \cos \gamma} = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} \quad (3.11a)$$

- 傾斜角/ピッチ $\theta_y = \beta$

$$\tan \theta_y = \frac{-n_1}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2)}} = \frac{-(-\sin \beta)}{\sqrt{(\cos^2 \beta \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta \sin^2 \gamma)}} = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \quad (3.11b)$$

- 傾斜角/ロール $\theta_x \neq \alpha$

$$\begin{aligned} \tan \theta_x &= \frac{n_2}{\sqrt{(l_2^2 + m_2^2)}} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sqrt{(\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha \sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma + \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma)}} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sqrt{(\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha)}} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sqrt{(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta)}} \end{aligned} \quad (3.11c)$$

式 (3.11ab) を用いて式 (3.11c) を $\sin \alpha$ について解くと

$$\sin \alpha = \frac{\sin \theta_x}{\cos \theta_y} \quad (3.12)$$

となり, これは式 (3.6ab), 式 (3.7ab) で導入したパラメーター s に等しい. 従って

$$s = \sin \alpha, \quad c = \cos \alpha \quad \left(= \sqrt{(1 - s^2)} \right) \quad (3.13)$$

この等式は式 (3.7ab) と式 (3.10ab) の対応要素を比較することによっても得られる.

式 (3.12) と式 (3.13) により姿勢角 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ と回転角 α, β, γ の相互変換が可能になる. 式 (3.10ab) を書き直せば

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & \sin \alpha \sin \theta_y \cos \theta_z - \cos \alpha \sin \theta_z & \cos \alpha \sin \theta_y \cos \theta_z + \sin \alpha \sin \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & \sin \alpha \sin \theta_y \sin \theta_z + \cos \alpha \cos \theta_z & \cos \alpha \sin \theta_y \sin \theta_z - \sin \alpha \cos \theta_z \\ -\sin \theta_y & \sin \alpha \cos \theta_y & \cos \alpha \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (3.14a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & \cos \theta_y \sin \theta_z & -\sin \theta_y \\ \sin \alpha \sin \theta_y \cos \theta_z - \cos \alpha \sin \theta_z & \sin \alpha \sin \theta_y \sin \theta_z + \cos \alpha \cos \theta_z & \sin \alpha \cos \theta_y \\ \cos \alpha \sin \theta_y \cos \theta_z + \sin \alpha \sin \theta_z & \cos \alpha \sin \theta_y \sin \theta_z - \sin \alpha \cos \theta_z & \cos \alpha \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.14b)$$

となり式 (3.14ab) は導入が異なるだけで式 (3.7ab) と同一であることが分かる. もちろんこれは z - y - x 系のオイラー角とここで定義した姿勢角についてのみ成り立つ.

3.3.2 ロドリゲスの式

座標系を各座標軸周りに同時に回転させて移動先の座標系を求める。これは本来の3軸の有限回転問題と言える。工学的には、座標軸のすべてにジャイロを配置して、回転角のロール、ピッチ、ヨウを測定するシステムへの応用が考えられる。ジャイロの測定角は相対値なので、求まる座標も相対座標となる。相対値の誤差は累積するため校正用にさらに傾斜計を併用する場合もある。地中掘削用ロボット、ロケットなどに応用例があるが、センサーに高い精度が要求され、その数も多いことから、どのシステムも高価になる。

ここで「同時に回転」とは、3軸が目的の有限回転角度に至るまでの任意の回転角微小増分 $\Delta\omega_x, \Delta\omega_y, \Delta\omega_z$ に対して

$$\frac{\Delta\omega_x}{\omega_x} = \frac{\Delta\omega_y}{\omega_y} = \frac{\Delta\omega_z}{\omega_z} = \text{const} \quad (3.15)$$

が成り立つように回転することとする。

まず任意の位置ベクトル周りの1軸回転を考える。

原点を通る任意の軸を単位ベクトル $\mathbf{n} \{ n_x, n_y, n_z \}$ で表し、その軸の周りを角度 ω で回転する任意点を考える。回転は軸の方向から原点を見て反時計回りとする（負の方向はない）。任意点 $P(x_0, y_0, z_0)$ を位置ベクトル \mathbf{r} 、その移動先 $P'(x_1, y_1, z_1)$ を位置ベクトル \mathbf{r}' で表し、

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QS} + \overrightarrow{SP}' \\ &= \mathbf{r} + [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})] + \left[-[\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})] \cos \omega \right] + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \omega \\ &= \mathbf{r} + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \sin \omega + \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r})(1 - \cos \omega) \end{aligned}$$

これをまとめると次式を得る。

$$\mathbf{r}' = [\mathbf{E} + \mathbf{N} \sin \omega + \mathbf{N}^2(1 - \cos \omega)] \mathbf{r} \quad (3.16)$$

ここで

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}$$

と置いた。

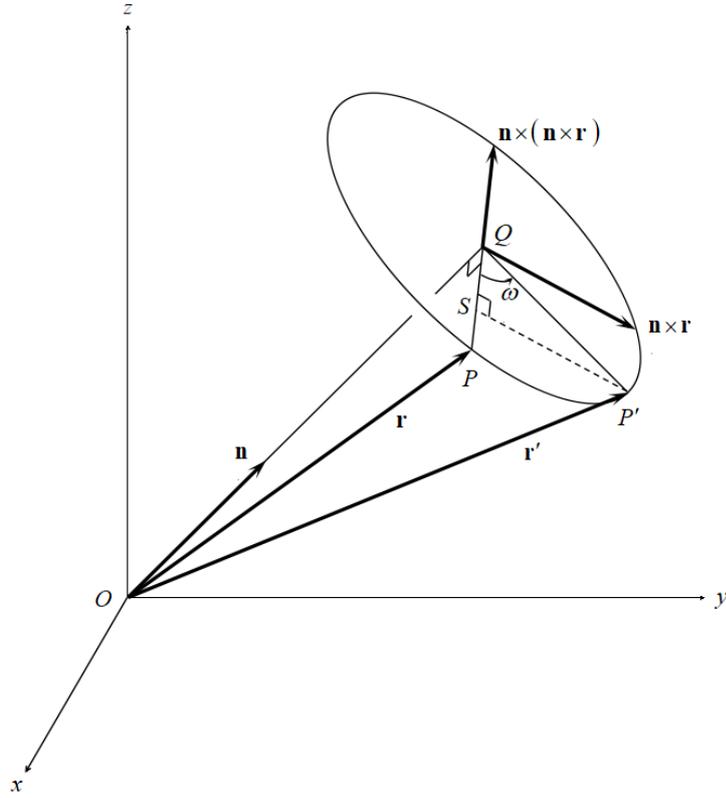


Fig.3 1軸回転のイメージ

この式はロドリゲスの回転公式 (Rodrigues' rotation formula) として知られている。
さらにこれを行列表示する。

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \sin \omega \\
 &+ \begin{bmatrix} -n_y^2 - n_z^2 & n_x n_y & n_z n_x \\ n_x n_y & -n_z^2 - n_x^2 & n_y n_z \\ -n_z n_x & n_y n_z & -n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} (1 - \cos \omega) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cos \omega + \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_z n_x \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ -n_z n_x & n_y n_z & n_z^2 \end{bmatrix} (1 - \cos \omega) \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix} \sin \omega \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

として、ひとつの回転行列にまとめる．ここで慣習的にアルファベットの R を用いて

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_n^{-1}(\omega) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (3.17a')$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_n^{-1}(\omega) \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad (3.17a)$$

となる．

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_n^{-1}(\omega) \\ = & \begin{bmatrix} \cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega) & -n_z \sin \omega + n_x n_y(1 - \cos \omega) & n_y \sin \omega + n_z n_x(1 - \cos \omega) \\ n_z \sin \omega + n_x n_y(1 - \cos \omega) & \cos \omega + n_y^2(1 - \cos \omega) & -n_x \sin \omega + n_y n_z(1 - \cos \omega) \\ -n_y \sin \omega + n_z n_x(1 - \cos \omega) & n_x \sin \omega + n_y n_z(1 - \cos \omega) & \cos \omega + n_z^2(1 - \cos \omega) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と置いた．これを逆に解けば

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}_n(\omega) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (3.17b')$$

あるいは

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_n(\omega) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.17b)$$

となるが、もちろん

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_n(\omega) \\ = & \begin{bmatrix} \cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega) & n_z \sin \omega + n_x n_y(1 - \cos \omega) & -n_y \sin \omega + n_z n_x(1 - \cos \omega) \\ -n_z \sin \omega + n_x n_y(1 - \cos \omega) & \cos \omega + n_y^2(1 - \cos \omega) & n_x \sin \omega + n_y n_z(1 - \cos \omega) \\ n_y \sin \omega + n_z n_x(1 - \cos \omega) & -n_x \sin \omega + n_y n_z(1 - \cos \omega) & \cos \omega + n_z^2(1 - \cos \omega) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と置いた．

これは任意の 1 軸の周りの回転行列であって、このままでは 3 軸の回転との相関が明確ではない．そこでこの式の意味を調べる．

点 P の回転が微小の場合を考える。微小回転角 $\Delta\omega$ によってベクトル \mathbf{r} がベクトル $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ に移動したとする。 $\Delta\omega$ は微小角だから $\cos \Delta\omega \simeq 1$, $\sin \Delta\omega \simeq \Delta\omega$ となり、式 (3.8) は近似的に

$$\begin{aligned}\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} &= [\mathbf{E} + \mathbf{N} \sin \Delta\omega + \mathbf{N}^2(1 - \cos \Delta\omega)] \mathbf{r} \\ &\simeq (\mathbf{E} + \mathbf{n}\Delta\omega) \mathbf{r}\end{aligned}$$

と書ける。これをさらに展開して

$$\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} \simeq \mathbf{r} + (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) \Delta\omega$$

ベクトル \mathbf{r} を消去すれば

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\omega} \simeq \mathbf{n} \times \mathbf{r}$$

となるから、式 (3.16) は 1 階の線形微分方程式

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\omega} = \mathbf{n} \times \mathbf{r} \tag{3.18}$$

の解であることが予想できる。

ところが、式 (3.18) の解はすでに

$$\mathbf{r}(\omega) = \exp(\mathbf{N}\omega) \mathbf{r}(0)$$

であることが知られている。これを証明するために、まず $\exp(\mathbf{N}\omega)$ をテーラー展開する

$$\exp(\mathbf{N}\omega) = \mathbf{E} + \mathbf{N}\omega + \frac{(\mathbf{N}\omega)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{N}\omega)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{N}\omega)^4}{4!} + \frac{(\mathbf{N}\omega)^5}{5!} + \dots$$

\mathbf{N} の高次の項は、 $\mathbf{N}^3 = -\mathbf{N}$ から、それぞれ \mathbf{N} と \mathbf{N}^2 の項としてまとめることができる。

$$\begin{aligned}\exp(\mathbf{N}\omega) &= \mathbf{E} + \left[\mathbf{N}\omega - \frac{\mathbf{N}\omega^3}{3!} + \frac{\mathbf{N}\omega^5}{5!} - \frac{\mathbf{N}\omega^7}{7!} + \dots \right] + \left[\frac{\mathbf{N}^2\omega^2}{2!} - \frac{\mathbf{N}^2\omega^4}{4!} + \frac{\mathbf{N}^2\omega^6}{6!} - \dots \right] \\ &= \mathbf{E} + \mathbf{N} \left[\omega - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \frac{\omega^7}{7!} + \dots \right] + \mathbf{N}^2 \left[\frac{\omega^2}{2!} - \frac{\omega^4}{4!} + \frac{\omega^6}{6!} - \dots \right]\end{aligned}$$

ここで

$$\sin \omega = \omega - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \frac{\omega^7}{7!} + \dots, \quad \cos \omega = 1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} - \frac{\omega^6}{6!} + \dots$$

であるから次式を得る。

$$\exp(\mathbf{N}\omega) = \mathbf{E} + \mathbf{N} \sin \omega + \mathbf{N}^2(1 - \cos \omega) \tag{3.19}$$

結局、これはすでに導いた回転行列 \mathbf{R}_n^{-1} に他ならない。

$$\mathbf{R}_n^{-1}(\omega) = \exp(\mathbf{N}\omega)$$

本題に戻って、ロール ω_x 、ピッチ ω_y 、ヨウ ω_z が与えられたときの有限回転を調べる。式 (3.15) は3つの角が一定の比例関係を成すことを示している。回転角を正規化してもこの関係は変わらないから

$$\omega_x : \omega_y : \omega_z = \frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}} : \frac{\omega_y}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}} : \frac{\omega_z}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}}$$

従って次の置換が成り立つ

$$n_x = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad n_y = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad n_z = \frac{\omega_z}{\omega} \quad (3.20)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (3.21)$$

これは3軸回転が実際には1軸周りの回転であることを示している。回転軸は3軸回転それぞれの軸回転角の比率によって式 (3.20) から定まり、回転角は軸回転角の大きさによって式 (3.21) から定まる。

工学的興味は姿勢角なのでこの式から傾きを求める。ここで式 (2.2abc) を用いて座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ の姿勢角の方向係数を調べる。

- 方位角/アジマス θ_z

$$\tan \theta_z = \frac{m_1}{l_1} \quad (3.22a)$$

- 傾斜角/ピッチ θ_y

$$\tan \theta_y = \frac{-n_1}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2)}} \quad (3.22b)$$

- 傾斜角/ピッチ θ_x

$$\tan \theta_x = \frac{n_2}{\sqrt{(l_2^2 + m_2^2)}} \quad (3.22c)$$

ここで、もちろん次の様に置いた。

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos \omega + \omega_x^2 (1 - \cos \omega) \\ m_1 &= \omega_z \sin \omega + \omega_x \omega_y (1 - \cos \omega) \\ n_1 &= -\omega_y \sin \omega + \omega_z \omega_x (1 - \cos \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= -\omega_z \sin \omega + \omega_x \omega_y (1 - \cos \omega) \\ m_2 &= \cos \omega + \omega_y^2 (1 - \cos \omega) \\ n_2 &= \omega_x \sin \omega + \omega_y \omega_z (1 - \cos \omega) \end{aligned}$$

4 回転行列の応用

第4章で作成した回転式と回転行列の実際の応用例を示す。守秘契約違反あるいは特許侵害にまで影響が及ぶ可能性もあるので数学的に支障のない範囲で内容を変える。

4.1 回転行列

姿勢角から姿勢を求める回転行列をまとめる（以降、回転式の式番号で回転行列を示す）。二次元の回転行列については第3章にまとめた（式(3.1b)、式(3.2b)、式(3.3b)等）。

$$\mathbf{R}(\theta_y, \theta_z)|_{\theta_x=0} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & \cos \theta_y \sin \theta_z & -\sin \theta_y \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ \sin \theta_y \cos \theta_z & \sin \theta_y \sin \theta_z & \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (3.5b)$$

$$\mathbf{R}(\theta_x, \theta_y)|_{\theta_z=0} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ s \cdot \sin \theta_y & c & \sin \theta_x \\ c \cdot \sin \theta_y & -s & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (3.6b)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}(\theta_x, \theta_y, \theta_z) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & \cos \theta_y \sin \theta_z & -\sin \theta_y \\ s \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z - c \cdot \sin \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z + c \cdot \cos \theta_z & \sin \theta_x \\ c \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z + s \cdot \sin \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z - s \cdot \cos \theta_z & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7b)$$

ただし、 $\mathbf{R}(\theta_x, \theta_y)|_{\theta_z=0}$ 、 $\mathbf{R}(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ に限り

$$\begin{aligned} s &= \frac{\sin \theta_x}{\cos \theta_y}, \quad c = \sqrt{1 - s^2} \\ |\theta_x| + |\theta_y| &\leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

座標変換後の \bar{x} 軸周りの回転角（ロール*1）を α とすると

$$\sin \alpha = \frac{\sin \theta_x}{\cos \theta_y}$$

となり

$$s = \sin \omega_{\bar{x}}, \quad c = \cos \omega_{\bar{x}}$$

*1 これが海運用語の本来のロール（Roll）

回転角から姿勢を求める回転行列をまとめる。

z 軸, \bar{y} 軸, \bar{x} 軸の順に回転させると :

$$\mathbf{R}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.10b)$$

任意軸 $\mathbf{n}\{n_x, n_y, n_z\}$ 周りの ω で回転では :

$$\mathbf{R}_n(\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega) & n_z \sin \omega + n_x n_y(1 - \cos \omega) & -n_y \sin \omega + n_z n_x(1 - \cos \omega) \\ -n_z \sin \omega + n_x n_y(1 - \cos \omega) & \cos \omega + n_y^2(1 - \cos \omega) & n_x \sin \omega + n_y n_z(1 - \cos \omega) \\ n_y \sin \omega + n_z n_x(1 - \cos \omega) & -n_x \sin \omega + n_y n_z(1 - \cos \omega) & \cos \omega + n_z^2(1 - \cos \omega) \end{bmatrix} \quad (3.17b)$$

4.2 右手座標系と左手座標系

一般に方位を数値化する場合, 北を基準として時計回りの昇順で表す. 例えば, 度表示では北 0° , 東 90° , 南 180° , 西 270° となる. また土木や建築の配置図等の図面は原則的に北を上にして (または北を示す方位記号を表示して) 描かれる. ところが数学では, 直交座標系 $O-xy$ の x 軸は紙面などの表示面の右, y 軸は上, 角度は x 軸を基準にして反時計回りの昇順で表すという常識がある.

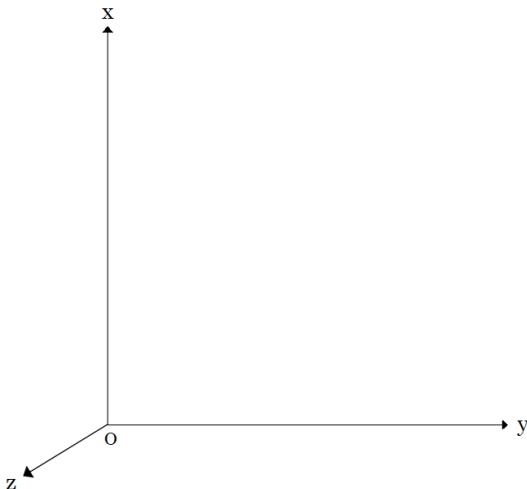


Fig.3 左手系
(z 軸が天頂軸)

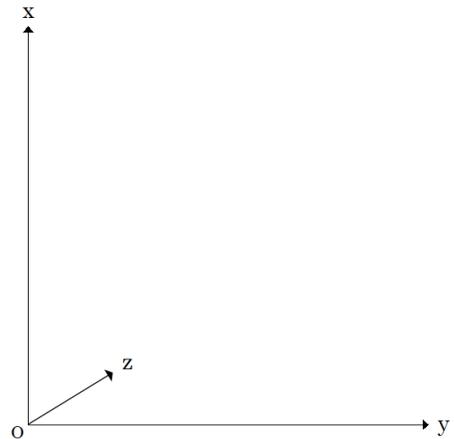


Fig.4 右手系
(z 軸が鉛直軸)

数学の常識に反し x 軸を上置く場合に混乱しないひとつの方法として、 z 軸の操作がある。左手座標系を使うのであれば、 z 軸を天頂軸とし、右手座標系を使うのであれば、 z 軸を鉛直軸とする。

4.3 建築への応用

古くは東京タワー、東京フォーラム、開閉式ドームの屋根、橋梁、最近ではスカイツリーなど、鉄骨という部材を組み合わせてできている。鉄骨は地上の工場で作られ、現場に運ばれ、クレーンで釣り上げて組み上げる。それが設計図どおりの位置にあるかその都度計測する必要がある。これを俗に「出来高計測」と呼んでいる。

鉄骨はむき出しなので外部から光学的に位置を計測できる。測距と測角の機能を併せ持ったトータルステーションと呼ばれる光学器で部材表面に貼られたターゲット（フィルム状のシートに十字を描いた標的）を視準すればターゲットのグローバル座標が得られる*2。この鉄骨上のターゲットの位置は地上であらかじめ測定しておく。これをターゲットに関しての座標 $\{x_0, y_0, z_0\}$ とする。

処理手順は、地上でのターゲットの座標を下記のいずれかの回転式を使って回転して新座標 $\{x_1, y_1, z_1\}$ を求め、これを三次元平行移動してターゲットのグローバル座標を再び得る。これをトータルステーションから得られたターゲットのグローバル座標と比較する。もちろんここで誤差があれば工法上の調整をする。これを順次繰り返すことによって、組立時の誤差の累積を防ぐ。

丸棒、管、チェーン、ワイヤーなど軸対象の部材、単純な H 鋼（断面が H の棒材）など中心軸周りの回転がない、あるいは回転しても断面が変化しない部材には x 軸を中心軸として式 (3.5a') を用いる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & -\sin \theta_z & \sin \theta_y \cos \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & \cos \theta_z & \sin \theta_y \sin \theta_z \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (3.5a')$$

軸非対称の部材で中心軸周りに回転する ($\theta_x \neq 0$) 部材には x 軸を中心軸として式 (3.5a') を用いる。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z - c \cdot \sin \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z + s \cdot \sin \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z + c \cdot \cos \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z - s \cdot \cos \theta_z \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (3.7a')$$

*2 計算方法については公開予定

4.4 測量への応用

方位を測定する特殊な手段として GPS (Global Positioning System) を利用したシステムがある。ここで方位とは真北からの角度を示す。物体に水平に固定された平盤上に複数の GPS センサーを設置して、その測位情報から平盤ひいては物体の方位を知ることができる。GPS による測定にはセンチメートルレベルの誤差があるので、その影響を最小限に抑えて方位を知る統計的手法を導く。

4.4.1 座標系の定義

平盤に固定されたローカル座標系 $O-\bar{x}\bar{y}$ を考える。各 GPS の設置位置はこの座標系に関する座標で表すものとする。この GPS の位置は設計値なのでその座標を真値として扱う。また個々の GPS からは緯度・経度による測位情報が返り、それから地球に固定された文字通りのグローバル座標系 $O-xy$ に関する座標を計算する。これらは測定値であり誤差を含むので統計的な処理が必要になる。

測位情報を北 x 軸、東 y 軸となるように地図情報に変換して、方位を北を基準にして時計回りの昇順で表す。

4.4.2 最小二乗法による演算

一般に回転式は両辺の一方の座標が既知で他方の座標が未知となるが、回転式の両辺の座標が既知で、回転行列の回転角度だけが未知になる。統計的には各 GPS の測定条件が共通ならば基数が多い程、測定精度が上がる。2 基 1 対で既に解析解が得られるが、統計に必要な最低限の数として 3 基とする^{*1}。

それぞれの GPS のセンサーの座標を定義する。

- グローバル座標系に関する座標 (測定値で誤差がある) :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

- ローカル座標系に関する座標 (設計値で真値) :

$$(\bar{x}_1, \bar{y}_1), (\bar{x}_2, \bar{y}_2), (\bar{x}_3, \bar{y}_3)$$

^{*1} 統計的意味を持たすには本来 4 基以上必要

z 軸周りの回転式を 2 次元に変更して用いる。回転角は 3 次元の場合と同様、 x 軸が y 軸に向かう方向を正とする。

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \leftarrow (3.1b)$$

測定値の中から任意の 1 対 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) を選ぶ。紙面の都合で行列を転置して次のように書き直す。

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \end{bmatrix}$$

他の 2 対の測定点を加えて拡張すれば

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2 & \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_3 & \bar{y}_1 - \bar{y}_3 \end{bmatrix}$$

さらに移項して

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2 & \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_3 & \bar{y}_1 - \bar{y}_3 \end{bmatrix} = 0$$

ところが測定値 (x_1, y_1) 等は誤差を含むため、式の右辺はゼロにはならない。そこで右辺の誤差を $\Delta x_1, \Delta y_1$ 等と置けば

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2 & \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_3 & \bar{y}_1 - \bar{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 \\ \Delta x_3 & \Delta y_3 \end{bmatrix} \quad (4.4.1a)$$

と書ける。ここで回転行列内の三角関数は $C \simeq \cos \omega$, $S \simeq \sin \omega$ と置いて変数とした。

これを行列に置き換えれば

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{R} - \mathbf{B} = \Delta \mathbf{d} \quad (4.4.1b)$$

最小二乗法によれば \mathbf{R} の最確値は誤差 $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ および $\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3$ の二乗和

$$\begin{aligned} S_x &= \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \\ S_y &= \Delta y_1^2 + \Delta y_2^2 + \Delta y_3^2 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

を最小にする \mathbf{R} である。それはこの二乗和 S_x, S_y を C, S で偏微分してゼロと置いた

$$\frac{\partial S_x}{\partial C} = 0, \quad \frac{\partial S_y}{\partial S} = 0$$

の解として得られる。式 (4.4.1a) を用いて式 (4.4.2) を変数 x および y で偏微分すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial S_x}{\partial C} &= \frac{\partial S_x}{\partial \Delta x_1} \cdot \frac{\partial \Delta x_1}{\partial C} + \frac{\partial S_x}{\partial \Delta x_2} \cdot \frac{\partial \Delta x_2}{\partial C} + \frac{\partial S_x}{\partial \Delta x_3} \cdot \frac{\partial \Delta x_3}{\partial C} \\ &= \Delta x_1 (x_2 - x_1) + \Delta x_2 (x_3 - x_2) + \Delta x_3 (x_1 - x_3) = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S_y}{\partial S} &= \frac{\partial S_y}{\partial \Delta y_1} \cdot \frac{\partial \Delta y_1}{\partial S} + \frac{\partial S_y}{\partial \Delta y_2} \cdot \frac{\partial \Delta y_2}{\partial S} + \frac{\partial S_y}{\partial \Delta y_3} \cdot \frac{\partial \Delta y_3}{\partial S} \\ &= \Delta y_1 (y_2 - y_1) + \Delta y_2 (y_3 - y_2) + \Delta y_3 (y_1 - y_3) = 0 \end{aligned}$$

を得る。これらを整理して行列を用いて表すと

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 \\ \Delta x_3 & \Delta y_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.4.3a)$$

再び記号に置き換えれば

$$\mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{d} = 0 \quad (4.4.3b)$$

と書ける*2。

ここで式 (4.4.1b) の両辺に左から \mathbf{A}^T を掛けると

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{d} \quad (4.4.4)$$

となる。しかし式 (4.4.3b) によれば式 (4.4.4) の右辺はゼロだから次式を得る。

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$$

成分表示に戻すと

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2 & \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_3 & \bar{y}_1 - \bar{y}_3 \end{bmatrix} \quad (4.4.5) \end{aligned}$$

*2 以降、最小二乗法による近似式なので厳密には等号 ”=” は使えない

行列積を実施すれば式 (4.4.5) は次のように集約できる.

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

左辺の行列の対角要素は $f_{12} = f_{21}$ であるから

$$\begin{aligned} C &= \frac{g_{11} + g_{22}}{f_{11} + f_{22}} \\ S &= \frac{g_{21} - g_{12}}{f_{11} + f_{22}} \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

これを三角関数に戻す

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{C}{\sqrt{C^2 + S^2}} \\ \sin \omega &= \frac{S}{\sqrt{C^2 + S^2}} \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

方位は

$$\omega = \arctan \frac{\sin \omega}{\cos \omega} \quad (4.4.9)$$

と求まる*3.

なお式 (4.4.5) は n 対の式に一般化できる

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & \cdots & x_1 - x_n \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & \cdots & y_1 - y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ \cdots & \cdots \\ x_1 - x_n & y_1 - y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_2 & \cdots & x_1 - x_n \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_2 & \cdots & y_1 - y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 - \bar{x}_1 & \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \bar{x}_3 - \bar{x}_2 & \bar{y}_3 - \bar{y}_2 \\ \cdots & \cdots \\ \bar{x}_1 - \bar{x}_n & \bar{y}_1 - \bar{y}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.4.3 架空データによる検算

式の導入の前提として平盤上の GPS センサーは精密に固定され、その座標を真値とした。ところが測量用の GPS の精度は縦にした卵 1 個分の分解能と言われている。この精

*3 数値計算では $\cos \omega$, $\sin \omega$ の二値で角度を表現する場合もある

度の対比を再現するため、グローバル座標系に関する座標を cm 単位で、ローカル座標系に関する座標を mm 単位に丸めた。

それぞれ、I 字形 2 基，正三角形 3 基，正方形 4 基に配置した GPS を正方向に 40 度回転させた測定データ（グローバル座標系に関する座標）を収録した状態を模擬する。辺の長さは一律 346mm とした。

方位をそれぞれ度分秒に変換して表すと

$$\omega_d = 0.694007 \frac{180}{\pi} \simeq 39^\circ 45' 49.8'' \quad \text{I 字形 2 基}$$

$$\omega_d = 0.697740 \frac{180}{\pi} \simeq 39^\circ 58' 39.2'' \quad \text{正三角形 3 基}$$

$$\omega_d = 0.698439 \frac{180}{\pi} \simeq 40^\circ 01' 03.3'' \quad \text{正方形 4 基}$$

この程度のサンプル数では大数の定理に従ったとまでは言えないものの，測位点の数に比例して精度が上がるのが分かる。ちなみに正方形 4 基の誤差 1'（分）は勾配 0.029/100（100m 当たり 29mm）に等しい。しかしこれは，誤差を含むはずの GPS の固定位置を真値として扱った結果であり，実際にはこのような高精度はあり得ない。

正確な GPS 測定には事前の準備が必要であるが，動的に真北からの方位を測定する手段としてこれ以外の方法は多くはない。

4.5 土木計算への応用

海洋掘削や土質改良など地中に穴を掘る工事に使われる掘削機がある。その中で支点が上部にある懸垂式と呼ばれるタイプでは、リーダーなどの地中内の支えがないため掘削中にドリルの先端が前後左右に移動する可能性がある。目視できないドリル先端の位置を知るために、互いに直角に置いた傾斜計で傾斜角を計測することがある。特に深く掘削する工事では軸も長くなるので軸周りの回転が生まれる。その場合には回転を計測するためにドリル先端近くにジャイロスコープを追加する（特許情報）。

傾斜計とジャイロスコープの計測値からドリル先端の位置を求める計算式を導く。これまでの問題と異なり、被検物を外部から観測できないので計測値だけが頼りになる。

4.5.1 座標系の定義

座標原点を共通にとったグローバル座標系とローカル座標系を定義する。 xy 平面を水平面、掘削機の前方向など基準となる方向を x 軸、その右方向を y 軸とする。鉛直方向の z 軸はドリルシャフトの中心線と一致する。初期状態では共通座標であるが、ローカル座標系はドリルに固定されているので、掘削時には θ_x , θ_y の傾斜、(場合によっては) ω_z の回転が生じるため姿勢が変わる (Fig.5)。座標原点はドリル先端から任意の距離 L を取った位置とする。

本来、ドリルシャフトを複数のセグメントに分け積算計算をして貫入の軌跡をたどるが、ここでは有限回転問題を扱っているので先端のセグメントのみを解析の対象とする。ドリルシャフトが特別に短い工事ではこれを剛体と見なせるので、ドリル支点を原点とすることもできる。

ドリル先端のグローバル座標系 $O-xyz$ に関する座標 $\{x_1, y_1, z_1\}$ が未知で、ローカル座標系 $O-\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ に関する座標が既知なのでこれを初期状態のグローバル座標系に関する座標 $\{x_0, y_0, z_0\}$ とすれば、座標成分の変換式 (2.1a') を適合式として使える。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (2.1a')$$

4.5.2 z 軸周りの回転角がゼロのときの回転行列

z 軸周りの回転角 ω_z は相対角なので、一義的な解は得られない。各軸の回転の経路は無限に存在するので解も無限に存在する。しかし z 軸周りの回転角がゼロのときの姿勢は定める必要がある。1 軸回転すなわちロドリゲスの回転公式 (3.17a) が成り立つよう

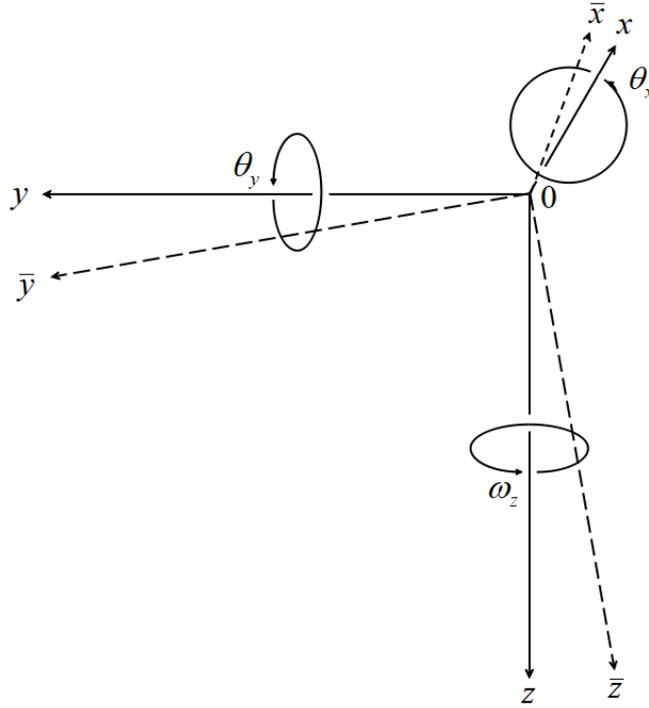


Fig.5 グローバル座標系 O-xyz とローカル座標系 O-x̄ȳz̄

に, $\omega_z = 0$ を維持しながら θ_x, θ_y 傾斜した姿勢を求める. その解は同式に $\omega_z = 0$ すなわち $n_z = 0$ と代入することで簡単に得られる. ここではそれを基準姿勢と呼ぶ.

基準姿勢の回転行列を 3 姿勢角による回転式 (3.7a) の回転行列に当てはめる. 適合式 (2.1a') を参考にしながら, 両式の回転行列を比較する (必要な成分のみ):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} && \leftarrow (2.1a') \\ & = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} && \leftarrow (3.7a) \\ & = \begin{bmatrix} \cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega) & n_x n_y(1 - \cos \omega) & n_y \sin \omega \\ n_x n_y(1 - \cos \omega) & \cos \omega + n_y^2(1 - \cos \omega) & -n_x \sin \omega \\ -n_y \sin \omega & n_x \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} && \leftarrow (3.17a) \end{aligned}$$

両行列の共通成分 $\{ n_1, n_2, n_3 \}$ に着目すると

$$\begin{aligned} n_y \sin \omega &= \sin \theta_y \\ n_x \sin \omega &= \sin \theta_x \\ \cos \omega &= c \cdot \cos \theta_y \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

と対応しているのが分かる．これから各変数は

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\sin \theta_x}{\sqrt{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y}} \\ n_y &= \frac{-\sin \theta_y}{\sqrt{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y}} \\ \cos \omega &= \sqrt{1 - (\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y)} \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

と定まる．基準姿勢のロドリゲスの回転公式は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega) & n_x n_y(1 - \cos \omega) & \sin \theta_y \\ n_x n_y(1 - \cos \omega) & \cos \omega + n_y^2(1 - \cos \omega) & -\sin \theta_x \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4.5.3a')$$

となり，これはそのまま掘削時に軸周りの回転がないシステムに使える．

4.5.3 z 軸周りの回転角がゼロではないときの回転行列

基準姿勢に ω_z に相当する姿勢の増分を加えて最終姿勢とする*1．まず基準姿勢のアジマスは式 (4.5.3a') の方向余弦成分を式 (2.2a) に代入すれば得られる．

$$\theta_z|_{\omega_z=0} = \arctan \frac{m_1}{l_1} = \arctan \frac{n_x n_y(1 - \cos \omega)}{\cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega)} \quad (\neq 0) \quad (4.5.4)$$

このように $\omega_z = 0$ であっても x 軸と y 軸に傾斜がある限り $\theta_z = 0$ にはならないことが分かる．これに z 軸周りの回転角ヨウ ω_z を加算して方位角アジマス θ_z とする．

$$\theta_z = \theta_z|_{\omega_z=0} + \omega_z \quad (4.5.5)$$

最終姿勢の回転式は，全ての姿勢角を式 (3.7a) に代入して

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z - c \cdot \sin \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z + s \cdot \sin \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z + c \cdot \cos \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z - s \cdot \cos \theta_z \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4.5.6a')$$

あるいは z - y - x 系のオイラー角による回転式 (3.14a) に代入して

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & \sin \alpha \sin \theta_y \cos \theta_z - \cos \alpha \sin \theta_z & \cos \alpha \sin \theta_y \cos \theta_z + \sin \alpha \sin \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & \sin \alpha \sin \theta_y \sin \theta_z + \cos \alpha \cos \theta_z & \cos \alpha \sin \theta_y \sin \theta_z - \sin \alpha \cos \theta_z \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & \cos \alpha \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4.5.7a')$$

*1 これは解の可能性のひとつであるので近似解ではない

ここで

$$s = \frac{\sin \theta_x}{\cos \theta_y}, \quad c = \sqrt{(1 - s^2)}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \theta_x}{\cos \theta_y}, \quad \cos \alpha = \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)}$$

$$|\theta_x| + |\theta_y| \leq \frac{\pi}{2}$$

とした。

回転式 (4.5.6a') と回転式 (4.5.7a') はアプローチが異なるだけで同一である。

4.5.4 ドリル先端の計算式

座標原点からドリルの先端までの長さを L とした。よって初期状態のドリル先端の座標は

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L \end{bmatrix}$$

であるから、これを式 (4.5.3a') に代入すれば、 z 軸周りの回転角がゼロのときのドリル先端の座標が得られ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L \cdot \begin{bmatrix} \sin \theta_y \\ -\sin \theta_x \\ \cos \omega \end{bmatrix} \quad (4.5.8)$$

式 (4.5.6a') に代入すれば、 z 軸周りの回転角がゼロではないときのドリル先端の座標が得られる

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L \cdot \begin{bmatrix} c \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z + s \cdot \sin \theta_z \\ c \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z - s \cdot \cos \theta_z \\ c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (4.5.9)$$

または式 (4.5.7a') に代入しても同じ計算式を得る。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \theta_y \cos \theta_z + \sin \alpha \sin \theta_z \\ \cos \alpha \sin \theta_y \sin \theta_z - \sin \alpha \cos \theta_z \\ \cos \alpha \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (4.5.10)$$

4.5.5 架空データによる検算

実測データがないので、ドリル先端の実際の計算はできない。そこでここでは基準姿勢のアジマスを求める式 (4.5.4) の検算をする。同じ傾斜角を与えて3姿勢角による回転式とロドリゲスの回転公式の数値を比較をする。

傾斜角を $\theta_{xd} = 4$ 度, $\theta_{yd} = 3$ 度 (「d」は単位が度であることを示す) とする*2。もちろん基準姿勢のヨウは $\omega_z = 0$ である。

まず

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y &= \sin^2\left(4\frac{\pi}{180}\right) + \sin^2\left(3\frac{\pi}{180}\right) \\ &= 0.0076\end{aligned}$$

なので式 (4.5.2) から

$$\begin{aligned}n_x &= \frac{\sin \theta_x}{\sqrt{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y}} \\ &= 0.7999\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n_y &= \frac{-\sin \theta_y}{\sqrt{\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y}} \\ &= -0.6001\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega &= \arccos \sqrt{1 - (\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y)} = \arccos(0.9962) \\ &= 0.0873 \quad (\simeq 5^\circ 00' 07'')\end{aligned}$$

これを基準姿勢ロドリゲスの回転公式 (4.5.3a') に代入すると

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega) & n_x n_y(1 - \cos \omega) & \sin \theta_y \\ n_x n_y(1 - \cos \omega) & \cos \omega + n_y^2(1 - \cos \omega) & -\sin \theta_x \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9986 & 0.0018 & 0.0523 \\ 0.0018 & 0.9976 & -0.0698 \\ -0.0523 & 0.0698 & 0.9962 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4.5.11a')\end{aligned}$$

ところが式 (4.5.4) から方位角アジマスが求まり。

$$\begin{aligned}\theta_z|_{\omega_z=0} &= \arctan \frac{n_x n_y(1 - \cos \omega)}{\cos \omega + n_x^2(1 - \cos \omega)} = \arctan \frac{0.0018}{0.9986} \\ &= 0.0018 \quad (\simeq 0^\circ 00' 06'')\end{aligned}$$

*2 実際にはこれ程、傾斜しない

与えたデータ $\theta_{xd} = 4$ 度, $\theta_{yd} = 3$ 度とここで計算した $\theta_z = 0.0018$ を 3 姿勢角による回転式 (4.5.6a') に代入すると

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z - c \cdot \sin \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \cos \theta_z + s \cdot \sin \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & s \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z + c \cdot \cos \theta_z & c \cdot \sin \theta_y \sin \theta_z - s \cdot \cos \theta_z \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x & c \cdot \cos \theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9986 & 0.0018 & 0.0523 \\ 0.0018 & 0.9976 & -0.0698 \\ -0.0523 & 0.0698 & 0.9962 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.12a')$$

となる。これはロドリゲスの回転公式から求めた式 (4.5.11a') と数值的に等しい。

4.6 天文計算への応用

太陽の表面に稀に現れる特別に明るい点を太陽フレアと呼ぶ。フレアは太陽の活動を知る上で重要な情報であり、発見されると観測日時はもちろん太陽上の緯度と経度から成る位置情報が記録される。最新のフレア観測システムでは、太陽フレア望遠鏡という特殊な望遠鏡で太陽を追尾しながら、モニター画面上でその画像をリアルタイムで観察できる。

フレアを特定するには、モニター上の位置情報から緯度と経度を知る必要があり、そのための計算式を導く。

4.6.1 座標系の定義

緯度、経度など地球の測地学的呼称はそのまま太陽にも当てはまる。ただし方位は地球と鏡像対称になっているので太陽に向かって右が西、左が東になる。

太陽球の中心を原点として春分点に向かう方向（太陽に向かって右）を x_s 軸、北極点に向かう方向（太陽に向かって上）を y_s 軸、地球に向かう方向を z_s 軸とする直交座標系*1を日心座標系 $O-x_s y_s z_s$ と呼ぶ。

ここでは太陽球の半径を単位長 1 とする。太陽の自転（後述）にも係わらず $y_s z_s$ 平面は常に地球に向くものとする。従って太陽の子午線は $y_s z_s$ 平面に含まれる。またモニターの太陽画像上においても直交座標系 $O-xyz$ を考える。太陽の像面の半径を同様に単位長 1 とし、これをグローバル座標系とする。

4.6.2 北極方向角

太陽は地球と同様、南北を軸として自転し*2、さらにその自転軸は歳差運動をしている。これは三つの角度で表現される。自転軸の東西の傾斜角を北極方向角 P と呼び、北極が東（太陽に向かって反時計回り）に傾く方向を正とする。自転軸の奥行き方向の傾斜角を日面中央緯度 B_0 と呼び、北極が手前に傾く方向を正とする。これらの角度および経度を表わす日面中央経度 L_0 と合わせて北極方向角と呼ぶ。

フレア位置の特定のために観測の日で時間を止め、その日に地球に向けた子午線をゼロとして経度の基準とする。そのため日面中央経度 $L_0 = 0$ と仮定したことになり無視してよい。その日の北極方向角と日面中央緯度はユリウス日からの通算日数によって計算する（手順省略、計算値は天文年鑑に記載）。

*1 極座標系で表す場合もある

*2 赤道で速く、南北の極で遅いという特殊な自転

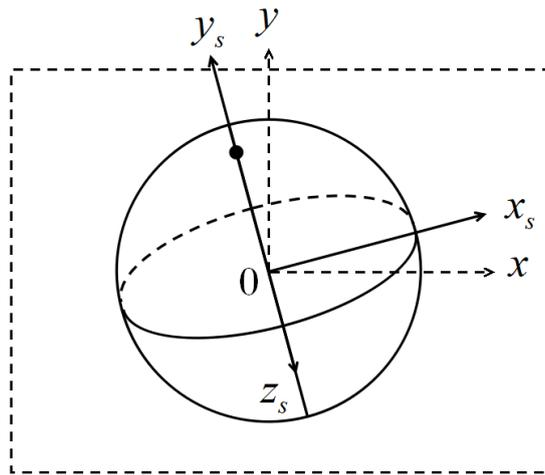


Fig.6 モニター画面上の太陽画像と座標系のイメージ
($B_0 > 0$, $P > 0$ の場合)

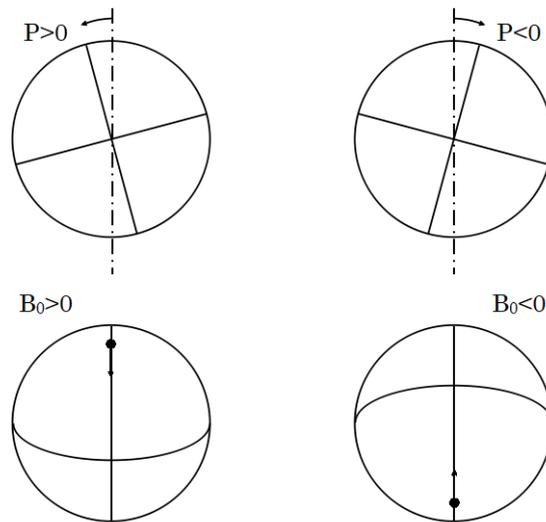


Fig.7 北極方向角 P と日面中央緯度 B_0 の意味と正負の定義
(黒丸は南北の極点)

4.6.3 太陽の緯度と経度

太陽表面の緯度と経度を日心座標系に関する座標で表わす．太陽表面の緯度 $\theta_d = 0$ ，経度 $\varphi_d = 0$ の位置ベクトル*3は z_s 軸の方向余弦 $\{x_{s0}, y_{s0}, z_{s0}\} = \{0, 0, 1\}$ である（「d」は単位が度であることを示す）．これを緯度 θ_d と経度 φ_d で順次回転させれば，その頂点は緯度・経度の座標を示す．これまでの回転角の定義に従って， $\theta_d > 0$ は南緯， $\varphi_d > 0$ は西経とする．

回転の範囲は地球上の緯度と経度に準じて

$$\begin{aligned} -90 \text{ [deg]} &\leq \theta_d \leq 90 \text{ [deg]} \\ -180 \text{ [deg]} &< \varphi_d \leq 180 \text{ [deg]} \end{aligned}$$

とする．

先ず，経度 $\varphi_d = 0$ のまま南緯 θ_d に移動する． x_s 軸周りに θ 回転させる．回転式 (3.3a')，すなわち座標成分の変換式を用いれば：

$$\begin{bmatrix} x_{s1} \\ y_{s1} \\ z_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s0} \\ y_{s0} \\ z_{s0} \end{bmatrix} \quad \leftarrow (3.3a')$$

次に，南緯 θ_d のまま西経 φ_d に移動する． y_s 軸周りに φ 回転させる．回転式 (3.2a') を用いれば：

$$\begin{bmatrix} x_{s2} \\ y_{s2} \\ z_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1} \\ y_{s1} \\ z_{s1} \end{bmatrix} \quad \leftarrow (3.2a')$$

従って，南緯 θ_d と西経 φ_d の日心座標系に関する座標は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{s2} \\ y_{s2} \\ z_{s2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここでもし逆に，フレアの日心座標系に関する座標 $\{x_{s2}, y_{s2}, z_{s2}\}$ が分かれば，そ

*3 赤道と子午線の交差点，地球に例えればギニア湾に相当

の緯度 θ_d と経度 φ_d が計算できる :

$$\sin \theta = -y_{s2} \quad (4.6.1a)$$

$$\tan \varphi = \frac{x_{s2}}{z_{s2}} \quad (4.6.1b)$$

4.6.4 日心座標系に関するフレアの座標

フレアはモニター画面に輝点となって現れる．点と言っても形のある領域なので，特定のロジックでその中心点を決める．この点の太陽画像のグローバル座系標に関する座標を $\{x, y, z\}$ とする．これを日心座標系に関する座標 $\{x_s, y_s, z_s\}$ に変換する．

まず， z 軸周りに北極方向角 P 回転させる（「r」は単位がラジアンであることを示す）．回転式 (3.1b)，すなわち座標系の変換式を用いれば：

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos P_r & \sin P_r & 0 \\ -\sin P_r & \cos P_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \leftarrow (3.1b)$$

次に， \bar{x} 軸周りに日面中央緯度 B_0 回転させる．回転式 (3.3b) を用いれば：

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \\ \bar{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B_{0r} & \sin B_{0r} \\ 0 & -\sin B_{0r} & \cos B_{0r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad \leftarrow (3.3b)$$

日心座標系に関するフレアの座標は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \\ \bar{\bar{z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B_{0r} & \sin B_{0r} \\ 0 & -\sin B_{0r} & \cos B_{0r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos P_r & \sin P_r & 0 \\ -\sin P_r & \cos P_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B_{0r} & \sin B_{0r} \\ 0 & -\sin B_{0r} & \cos B_{0r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x \cos P_r + y \sin P_r) \\ (-x \sin P_r + y \cos P_r) \\ \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (x \cos P_r + y \sin P_r) \\ (-x \sin P_r + y \cos P_r) \cos B_{0r} + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \sin B_{0r} \\ -(-x \sin P_r + y \cos P_r) \sin B_{0r} + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \cos B_{0r} \end{bmatrix} \quad (4.6.2) \end{aligned}$$

各座標系の成分は共通なので

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \\ \bar{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{s2} \\ y_{s2} \\ z_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$$

フレアの南緯 θ_d と西経 φ_d は式 (4.6.1ab) と式 (4.6.2) から

$$\sin \theta = -(-x \sin P_r + y \cos P_r) \cos B_{0r} - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \sin B_{0r} \quad (4.6.3)$$

$$\tan \varphi = \frac{x \cos P_r + y \sin P_r}{-(-x \sin P_r + y \cos P_r) \sin B_{0r} + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \cos B_{0r}} \quad (4.6.4)$$

逆三角形関数を用いて緯度と経度に換算する.

$$\theta_d = \frac{180}{\pi} \theta$$

$$\varphi_d = \frac{180}{\pi} \varphi$$

ここで日面中央緯度 B_0 が大きい場合, 経度 φ_d は数学的には太陽の裏側

$$|\varphi_d| > 90 \text{ [deg]}$$

をも表せるが, 次項に挙げる理由から実質的には表示範囲はほぼ表側に限られる.

$$-90 \text{ [deg]} < \varphi_d < 90 \text{ [deg]}$$

4.6.5 リム・フレア (rim flare)

左の太陽を右遠方の地球から観測する視線の束*4を斜線で示す (Fig.8). この領域の境界から太陽の外輪 (「リム」と呼ぶ) に向かって太陽表面が視線奥に傾斜してしまうため観測領域が狭くなって行くのが分かる. モニター画面の解像度はもちろん領域に依らず一定なので, それだけ座標の読み取り精度が落ちる.

一般には中心からの観測限界を決めて緯度・経度の式の有効範囲とする. この範囲外のフレアは一括して外輪に現れたものと仮定して緯度・経度を計算する. これをリム・フレアと呼ぶ. これについては特別な計算方法があるが, ここでは扱わない.

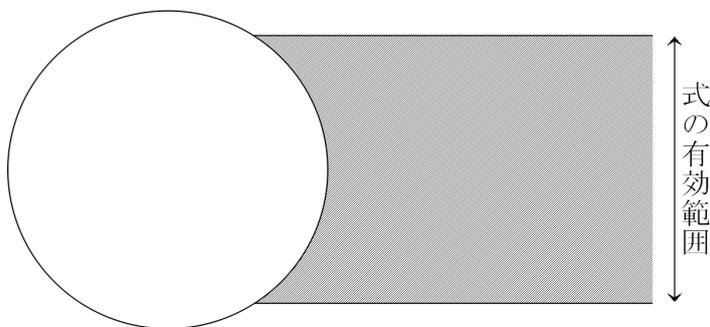


Fig.8 太陽の実質的観測範囲

*4 逆に光線の束と考えるとも良い

4.6.6 実際の観測データによる検算

実際の太陽画像のハードコピーから式 (4.6.3) と式 (4.6.4) の検証を試みる. 太陽フレアのグローバル座標系に関する座標は $\{ x, y \} = \{ -0.38, 0.07 \}$ であり, 観測年月日の北極方向角は観測年の天文年鑑によれば北極方向角 $P = -24.24$ 度, 日面中央緯度 $B_0 = -7.19$ 度であった*5.

これらの値を式 (4.6.3) に代入する.

$$\begin{aligned} \sin \theta &= -(-x \sin P_r + y \cos P_r) \cos B_{0r} - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \sin B_{0r} \\ &= - \left[-(-0.38) \sin \left(-24.24 \frac{\pi}{180}\right) + (0.07) \cos \left(-24.24 \frac{\pi}{180}\right) \right] \cos \left(-7.19 \frac{\pi}{180}\right) \\ &\quad - \sqrt{1 - [(-0.38)^2 + (0.07)^2]} \sin \left(-7.19 \frac{\pi}{180}\right) \\ &= 0.2069 \end{aligned}$$

次に x_s および z_s の値を計算する

$$\begin{aligned} x_s &= x \cos P_r + y \sin P_r \\ &= (-0.38) \cos \left(-24.24 \frac{\pi}{180}\right) + (0.07) \sin \left(-24.24 \frac{\pi}{180}\right) \\ &= -0.3752 \\ z_s &= -(-x \sin P_r + y \cos P_r) \sin B_{0r} + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \cos B_{0r} \\ &= - \left[-(-0.38) \sin \left(-24.24 \frac{\pi}{180}\right) + (0.07) \cos \left(-24.24 \frac{\pi}{180}\right) \right] \sin \left(-7.19 \frac{\pi}{180}\right) \\ &\quad + \sqrt{1 - [(-0.38)^2 + (0.07)^2]} \cos \left(-7.19 \frac{\pi}{180}\right) \\ &= 0.9035 \end{aligned}$$

これらを式 (4.6.1b) に代入する

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{x_s}{z_s} \\ &= \frac{-0.3752}{0.9035} \\ &= 0.4153 \end{aligned}$$

*5 ちなみに日面中央経度 $L_0 = 211.52$ 度

緯度・経度に換算すると

$$\theta_d = \arcsin(0.2069) \frac{180}{\pi}$$
$$\simeq 11^\circ 56' \quad \dots \text{南緯}$$

$$\varphi_d = \arctan(0.4153) \frac{180}{\pi}$$
$$\simeq -22^\circ 33' \quad \dots \text{東経}$$

を得る.

同じ太陽フレアについて, 当日の日本の天文台の発表では南緯 12 度, 東経 23 度であった. 日本列島のような斜めに細長い形状だったため, どこを中心と捉えるかでこの程度の誤差は生じる.