

4.6 天文計算への応用

太陽の表面に稀に現れる特別に明るい点を太陽フレアと呼ぶ。フレアは太陽の活動を知る上で重要な情報であり、発見されると観測日時はもちろん太陽上の緯度と経度から成る位置情報が記録される。最新のフレア観測システムでは、太陽フレア望遠鏡という特殊な望遠鏡で太陽を追尾しながら、モニター画面上でその画像をリアルタイムで観察できる。

フレアを特定するには、モニター上の位置情報から緯度と経度を知る必要があり、そのための計算式を導く。

4.6.1 座標系の定義

緯度、経度など地球の測地学的呼称はそのまま太陽にも当てはまる。ただし方位は地球と鏡像対称になっているので太陽に向かって右が西、左が東になる。

太陽球の中心を原点として春分点に向かう方向（太陽に向かって右）を x_s 軸、北極点に向かう方向（太陽に向かって上）を y_s 軸、地球に向かう方向を z_s 軸とする直交座標系*1を日心座標系 $O-x_s y_s z_s$ と呼ぶ。

ここでは太陽球の半径を単位長 1 とする。太陽の自転（後述）にも係わらず $y_s z_s$ 平面は常に地球に向くものとする。従って太陽の子午線は $y_s z_s$ 平面に含まれる。またモニターの太陽画像上においても直交座標系 $O-xyz$ を考える。太陽の像面の半径を同様に単位長 1 とし、これをグローバル座標系とする。

4.6.2 北極方向角

太陽は地球と同様、南北を軸として自転し*2、さらにその自転軸は歳差運動をしている。これは三つの角度で表現される。自転軸の東西の傾斜角を北極方向角 P と呼び、北極が東（太陽に向かって反時計回り）に傾く方向を正とする。自転軸の奥行き方向の傾斜角を日面中央緯度 B_0 と呼び、北極が手前に傾く方向を正とする。これらの角度および経度を表わす日面中央経度 L_0 と合わせて北極方向角と呼ぶ。

フレア位置の特定のために観測の日で時間を止め、その日に地球に向けた子午線をゼロとして経度の基準とする。そのため日面中央経度 $L_0 = 0$ と仮定したことになり無視してよい。その日の北極方向角と日面中央緯度はユリウス日からの通算日数によって計算する（手順省略、計算値は天文年鑑に記載）。

*1 極座標系で表す場合もある

*2 赤道で速く、南北の極で遅いという特殊な自転

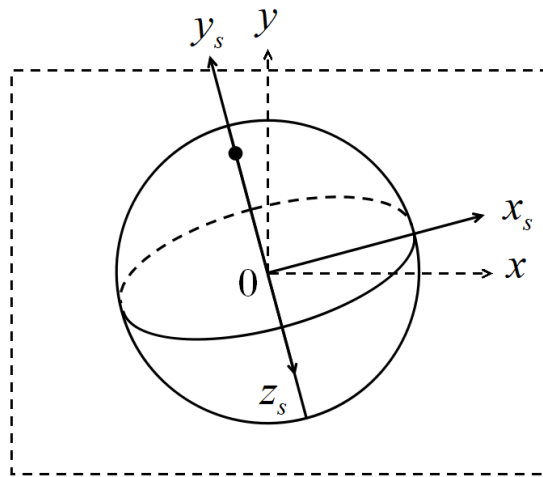


Fig.6 モニター画面上の太陽画像と座標系のイメージ
($B_0 > 0$, $P > 0$ の場合)

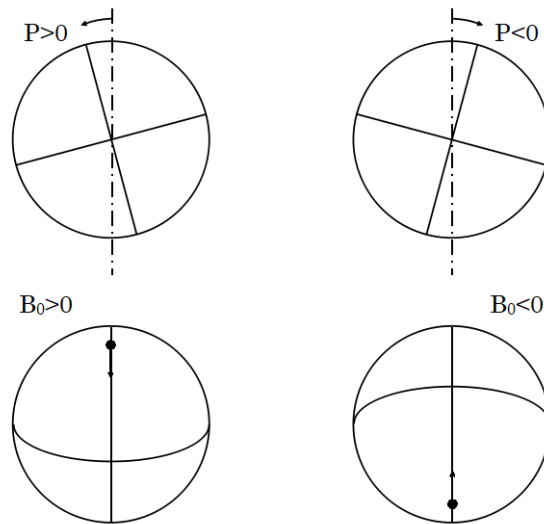


Fig.7 北極方向角 P と日面中央緯度 B_0 の意味と正負の定義
(黒丸は南北の極点)

4.6.3 太陽の緯度と経度

太陽表面の緯度と経度を日心座標系に関する座標で表わす．太陽表面の緯度 $\theta_d = 0$ ，経度 $\varphi_d = 0$ の位置ベクトル*3は z_s 軸の方向余弦 $\{x_{s0}, y_{s0}, z_{s0}\} = \{0, 0, 1\}$ である（「d」は単位が度であることを示す）．これを緯度 θ_d と経度 φ_d で順次回転させれば，その頂点は緯度・経度の座標を示す．これまでの回転角の定義に従って， $\theta_d > 0$ は南緯， $\varphi_d > 0$ は西経とする．

回転の範囲は地球上の緯度と経度に準じて

$$\begin{aligned} -90 \text{ [deg]} &\leq \theta_d \leq 90 \text{ [deg]} \\ -180 \text{ [deg]} &< \varphi_d \leq 180 \text{ [deg]} \end{aligned}$$

とする．

先ず，経度 $\varphi_d = 0$ のまま南緯 θ_d に移動する． x_s 軸周りに θ 回転させる．回転式 (3.3a')，すなわち座標成分の変換式を用いれば：

$$\begin{bmatrix} x_{s1} \\ y_{s1} \\ z_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s0} \\ y_{s0} \\ z_{s0} \end{bmatrix} \quad \leftarrow (3.3a')$$

次に，南緯 θ_d のまま西経 φ_d に移動する． y_s 軸周りに φ 回転させる．回転式 (3.2a') を用いれば：

$$\begin{bmatrix} x_{s2} \\ y_{s2} \\ z_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1} \\ y_{s1} \\ z_{s1} \end{bmatrix} \quad \leftarrow (3.2a')$$

従って，南緯 θ_d と西経 φ_d の日心座標系に関する座標は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{s2} \\ y_{s2} \\ z_{s2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここでもし逆に，フレアの日心座標系に関する座標 $\{x_{s2}, y_{s2}, z_{s2}\}$ が分かれば，そ

*3 赤道と子午線の交差点，地球に例えればギニア湾に相当

の緯度 θ_d と経度 φ_d が計算できる :

$$\sin \theta = -y_{s2} \quad (4.6.1a)$$

$$\tan \varphi = \frac{x_{s2}}{z_{s2}} \quad (4.6.1b)$$

4.6.4 日心座標系に関するフレアの座標

フレアはモニター画面に輝点となって現れる．点と言っても形のある領域なので，特定のロジックでその中心点を決める．この点の太陽画像のグローバル座系標に関する座標を $\{x, y, z\}$ とする．これを日心座標系に関する座標 $\{x_s, y_s, z_s\}$ に変換する．

まず， z 軸周りに北極方向角 P 回転させる（「 r 」は単位がラジアンであることを示す）．回転式 (3.1b)，すなわち座標系の変換式を用いれば：

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos P_r & \sin P_r & 0 \\ -\sin P_r & \cos P_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \leftarrow (3.1b)$$

次に， \bar{x} 軸周りに日面中央緯度 B_0 回転させる．回転式 (3.3b) を用いれば：

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \\ \bar{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B_{0r} & \sin B_{0r} \\ 0 & -\sin B_{0r} & \cos B_{0r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} \quad \leftarrow (3.3b)$$

日心座標系に関するフレアの座標は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \\ \bar{\bar{z}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B_{0r} & \sin B_{0r} \\ 0 & -\sin B_{0r} & \cos B_{0r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos P_r & \sin P_r & 0 \\ -\sin P_r & \cos P_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B_{0r} & \sin B_{0r} \\ 0 & -\sin B_{0r} & \cos B_{0r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x \cos P_r + y \sin P_r) \\ (-x \sin P_r + y \cos P_r) \\ \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (x \cos P_r + y \sin P_r) \\ (-x \sin P_r + y \cos P_r) \cos B_{0r} + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \sin B_{0r} \\ -(-x \sin P_r + y \cos P_r) \sin B_{0r} + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \cos B_{0r} \end{bmatrix} \quad (4.6.2) \end{aligned}$$

各座標系の成分は共通なので

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \\ \bar{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{s2} \\ y_{s2} \\ z_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}$$

フレアの南緯 θ_d と西経 φ_d は式 (4.6.1ab) と式 (4.6.2) から

$$\sin \theta = -(-x \sin P_r + y \cos P_r) \cos B_{0r} - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \sin B_{0r} \quad (4.6.3)$$

$$\tan \varphi = \frac{x \cos P_r + y \sin P_r}{-(-x \sin P_r + y \cos P_r) \sin B_{0r} + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \cos B_{0r}} \quad (4.6.4)$$

逆三角形関数を用いて緯度と経度に換算する.

$$\theta_d = \frac{180}{\pi} \theta$$

$$\varphi_d = \frac{180}{\pi} \varphi$$

ここで日面中央緯度 B_0 が大きい場合, 経度 φ_d は数学的には太陽の裏側

$$|\varphi_d| > 90 \text{ [deg]}$$

をも表せるが, 次項に挙げる理由から実質的には表示範囲はほぼ表側に限られる.

$$-90 \text{ [deg]} < \varphi_d < 90 \text{ [deg]}$$

4.6.5 リム・フレア (rim flare)

左の太陽を右遠方の地球から観測する視線の束*4を斜線で示す (Fig.8). この領域の境界から太陽の外輪 (「リム」と呼ぶ) に向かって太陽表面が視線奥に傾斜してしまうため観測領域が狭くなって行くのが分かる. モニター画面の解像度はもちろん領域に依らず一定なので, それだけ座標の読み取り精度が落ちる.

一般には中心からの観測限界を決めて緯度・経度の式の有効範囲とする. この範囲外のフレアは一括して外輪に現れたものと仮定して緯度・経度を計算する. これをリム・フレアと呼ぶ. これについては特別な計算方法があるが, ここでは扱わない.

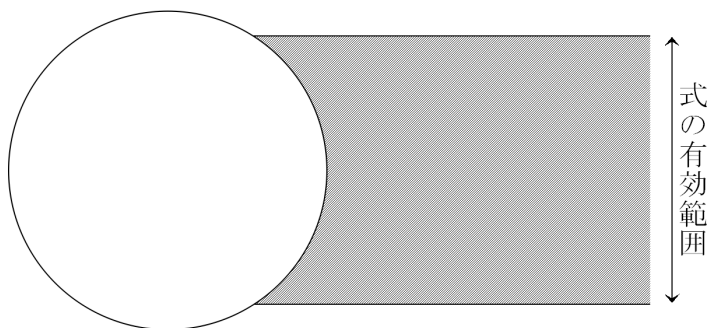


Fig.8 太陽の実質的観測範囲

*4 逆に光線の束と考えるとも良い

4.6.6 実際の観測データによる検算

実際の太陽画像のハードコピーから式 (4.6.3) と式 (4.6.4) の検証を試みる. 太陽フレアのグローバル座標系に関する座標は $\{ x, y \} = \{ -0.38, 0.07 \}$ であり, 観測年月日の北極方向角は観測年の天文年鑑によれば北極方向角 $P = -24.24$ 度, 日面中央緯度 $B_0 = -7.19$ 度であった*5.

これらの値を式 (4.6.3) に代入する.

$$\begin{aligned} \sin \theta &= -(-x \sin P_r + y \cos P_r) \cos B_{0r} - \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \sin B_{0r} \\ &= - \left[-(-0.38) \sin \left(-24.24 \frac{\pi}{180}\right) + (0.07) \cos \left(-24.24 \frac{\pi}{180}\right) \right] \cos \left(-7.19 \frac{\pi}{180}\right) \\ &\quad - \sqrt{1 - [(-0.38)^2 + (0.07)^2]} \sin \left(-7.19 \frac{\pi}{180}\right) \\ &= 0.2069 \end{aligned}$$

次に x_s および z_s の値を計算する

$$\begin{aligned} x_s &= x \cos P_r + y \sin P_r \\ &= (-0.38) \cos \left(-24.24 \frac{\pi}{180}\right) + (0.07) \sin \left(-24.24 \frac{\pi}{180}\right) \\ &= -0.3752 \\ z_s &= -(-x \sin P_r + y \cos P_r) \sin B_{0r} + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \cos B_{0r} \\ &= - \left[-(-0.38) \sin \left(-24.24 \frac{\pi}{180}\right) + (0.07) \cos \left(-24.24 \frac{\pi}{180}\right) \right] \sin \left(-7.19 \frac{\pi}{180}\right) \\ &\quad + \sqrt{1 - [(-0.38)^2 + (0.07)^2]} \cos \left(-7.19 \frac{\pi}{180}\right) \\ &= 0.9035 \end{aligned}$$

これらを式 (4.6.1b) に代入する

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{x_s}{z_s} \\ &= \frac{-0.3752}{0.9035} \\ &= 0.4153 \end{aligned}$$

*5 ちなみに日面中央経度 $L_0 = 211.52$ 度

緯度・経度に換算すると

$$\theta_d = \arcsin(0.2069) \frac{180}{\pi}$$
$$\simeq 11^\circ 56' \quad \dots \text{南緯}$$

$$\varphi_d = \arctan(0.4153) \frac{180}{\pi}$$
$$\simeq -22^\circ 33' \quad \dots \text{東経}$$

を得る.

同じ太陽フレアについて, 当日の日本の天文台の発表では南緯 12 度, 東経 23 度であった. 日本列島のような斜めに細長い形状だったため, どこを中心と捉えるかでこの程度の誤差は生じる.