4.7　測量への応用（2）

水平面，鉛直面における角度を測定するセオドライトと距離を測る光波距離計を組み合わせた測量器械をトータルステーションと呼ぶ．一般にはターゲットと呼ばれるプリズムまたは簡易的な反射シートやプレートを測量の対象点（測点）に置きまたは貼り，これを観測することによってターゲットの座標を知ることができる．

得られた観測値から測点の座標を求める計算式を導く．ここで示すのは計算式に至るまでのアルゴリズムであって，これを使う様々な応用が有り得る．

4.7.1　測距・測角データ

トータルステーションで測点を視準[*1]すると，器械に対するターゲットの水平面，鉛直面におけるそれぞれの角度とターゲットまでの斜距離が得られる．光波距離計とターゲットを結ぶ線分は，一般に水平面に対して上下に傾斜しているのでこれを斜距離と呼ぶ．

V_d：鉛直角 [°]　　$0^\circ \le V_d < 180^\circ$
H_d：水平角 [°]　　$0^\circ \le H_d < 360^\circ$
D：斜距離 [m]

ここで示すように角度のデータは度分秒（度数法）すなわち

$$dd^\circ\, mm'\, ss.s''$$

で与えられる．高精度な器械ではこの例のように秒の値にさらに小数点以下の位がある（$\pm 0.5''$）．電算処理にはラジアン（弧度法）に単位変換する必要がある．

V：鉛直角 [rad]　　$0 \le V < \pi$
H：水平角 [rad]　　$0 \le H < 2\pi$

鉛直角は天頂を 0（ゼロ）度として天底向きを正，水平角は任意の方向を 0（ゼロ）度として時計回りを正とするしている．この 0 度方向は器械を設置する際に任意に決めることができる．そのため手計算で検算する場合などでは，水平角が 0 度から 90 度の範囲に収まるように器械自体を回転させて設置することがある．これにより水平角が第一象限に集まり，角度の平均もとりやすく，三角関数が角度によって符号が変わることもない．また異常値（棄却値）を発見しやすいことにもつながる．

[*1] 望遠鏡の中心軸をターゲットの方向へ合わせること，ここでは測定して測定値を得ることも含む

定義は異なるが，鉛直角と水平角および斜距離がそれぞれ極座標の偏角，動径に対応するのでこれらの測定値を直交座標系に関する座標に変換できることがわかる．

■方位角定義

方位角を数値で表わす場合，真北を基準として東の方向，すなわち時計回りが正となる．同様に建築や土木の図面の多くは北を x 軸として時計回りを正としている．これは器械が出力する水平角の正方向と一致するので，天頂方向を z 軸とした場合*2，そのまま左手系座標系 z 軸周りの回転角として使える．

逆に観測対象が右手系座標を用いている場合，水平角の方向を

$$
\begin{aligned}
&H_d \leftarrow (360^\circ - H_d) \quad or \\
&H \leftarrow (2\pi - H) \quad or \\
&\sin H \leftarrow (-\sin H)
\end{aligned}
$$

などの処理をして反時計回りに変換する．これによって以下の数式は右手系座標にも左手系座標にも共通して適用できる．しかし手計算で計算結果を検証する場合などでは，方位角の正方向が器械の表示と異なることを意識しておく必要がある．

ここで二つの計算アルゴリズムを紹介する．一般に知られている測量法とは異なり器械点（ドライバー点）の座標を事前に測量しておく必要はない．

■座標系定義

座標系はすべて天頂方向を z 軸とする．またここで座標原点とはローカル座標系の原点を指すものとする（第１，第２共通）．

- グローバル座標系 O-xyz

器械点を原点として器械が持つ 0 度方向を x 軸とする座標系．器械座標系とも呼ぶ．

- 第 1 ローカル座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$（O-xyz を平行移動）

グローバル座標系の軸方向を変えずに原点を器械点から現場の座標原点まで平行移動した座標系．

- 第 2 ローカル座標系 O-$\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}$（O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ を回転移動）

第 1 ローカル座標系の原点を変えずに $\bar{z}$ 軸周りに回転移動した座標系．一般に，真北または方眼北などを $\bar{\bar{x}}$ 軸として測量前に定義しておく*3．測点をこの座標系に関する座標で表わすことが計算式の目的である．

*2 海洋掘削，土質改良工事などでは天底方向を z 軸とする
*3 理由があって必ず磁北を使う現場もある

4.7.2　二点法

その名のとおり 2 点の測点から座標系を定義する．座標原点（測点 p_0）と $\bar{\bar{x}}$ 座標上の標準点（測点 p_1）を測定する．この 2 測点の扱いは同じではない．測点 p_0 はいわゆる基準点であり真値と仮定する．一般には後視点[*4]から測量前に<u>移動</u>しておく必要がある．一方，測点 p_1 は座標軸の方向を与えるためにあり，その方位を真値と仮定する．

ここでは基本的に基準点は 1 観測対象に 1 点のみとする．従ってある基準点から別の基準点を相対的に決めることを「基準点を<u>移動</u>する」と表現する．

■原点測定（測点 p_0）

座標原点を視準して得られた測定ブロック V_0，H_0，D_0 から，グローバル座標系に関する測点 p_0 の座標を求める．これによってグローバル座標系から第 1 ローカル座標系への平行移動量が決まる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{a} &= D_0\ \sin V_0 \\
x_0 &= \mathrm{a}\cos H_0 \\
y_0 &= \mathrm{a}\sin H_0 \\
z_0 &= D_0\ \cos V_0
\end{aligned}
\tag{4.7.1}
$$

■標準点測定（測点 p_1）

同様に標準点を視準して得られた測定ブロック V_1，H_1，D_1 から，グローバル座標系に関する測点 p_1 の座標を求める．これによって第 1 ローカル座標系から第 2 ローカル座標系への回転移動量が決まる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{b} &= D_1\ \sin V_1 \\
x_1 &= \mathrm{b}\cos H_1 \\
y_1 &= \mathrm{b}\sin H_1 \\
z_1 &= D_1\ \cos V_1
\end{aligned}
\tag{4.7.2}
$$

よって第 1 ローカル座標系 0-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ に関する測点 p_1 の座標は

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= x_1 - x_0 \\
\bar{y}_1 &= y_1 - y_0 \\
\bar{z}_1 &= z_1 - z_0
\end{aligned}
\tag{4.7.3}
$$

[*4] 器械を基準として観測対象を前方，基準点を後という概念からこの名称がある

■回転移動量

測点 $p1$ の第 1 ローカル座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ に関する座標は $(\,\bar{x}_1, \bar{y}_1,\, 0\,)$ であり，第 2 ローカル座標系 O-$\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}$ に関する座標は $(\,\bar{\bar{x}}_1,\, 0,\, 0\,)$ をであるから，三平方の定理からグローバル座標系に関する標準点（測点 p1）の座標が容易に計算できる．

$$
\begin{aligned}
\bar{\bar{x}}_1 &= \sqrt{\left[\,\bar{x}_1^2\,+\,\bar{y}_1^2\,\right]} \\
\bar{\bar{y}}_1 &= 0 \\
\bar{\bar{z}}_1 &= 0
\end{aligned}
\tag{4.7.4}
$$

全座標系を xy 面に射影した上で，座標軸 $\bar{x}$ に対する $\bar{\bar{x}}$ の角度を ω として次の適合式を考える．

$$
\begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_1 \\ \bar{\bar{y}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{bmatrix}
\tag{4.7.5}
$$

ここで測定値から得られた両辺の座標が既知数で三角関数が未知数になる．ところが測定値は誤差を含むので，三角関数を $C_z \simeq \cos\omega$，$S_z \simeq \sin\omega$ と置き，変数としてもとめる．

$$
\begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{bmatrix}
\tag{4.7.6}
$$

クラメルの式を用いれば，これらの変数は

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1 &= \begin{vmatrix} \bar{\bar{x}}_1 & S \\ 0 & C \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} C & S \\ -S & C \end{vmatrix} \simeq \bar{\bar{x}}_1 \cdot C \\
\bar{y}_1 &= \begin{vmatrix} C & \bar{\bar{x}}_1 \\ -S & 0 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} C & S \\ -S & C \end{vmatrix} \simeq \bar{\bar{x}}_1 \cdot S
\end{aligned}
\tag{4.7.7}
$$

と求まる．ここでは分母の行列式を

$$
\begin{vmatrix} C & S \\ -S & C \end{vmatrix} = 1
$$

と単に仮定しただけなので右辺は等号で結べないが，この仮定が正しいとすると未知変数は

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\bar{x}_1}{\bar{\bar{x}}_1} = \frac{\mathrm{b}\cos H_1 - \mathrm{a}\cos H_0}{\sqrt{\left[\,\bar{x}_1^2\,+\,\bar{y}_1^2\,\right]}} \\
S &= \frac{\bar{y}_1}{\bar{\bar{x}}_1} = \frac{\mathrm{b}\sin H_1 - \mathrm{a}\sin H_0}{\sqrt{\left[\,\bar{x}_1^2\,+\,\bar{y}_1^2\,\right]}}
\end{aligned}
\tag{4.7.8}
$$

これを三角関数に戻す

$$
\begin{aligned}
\cos\omega =& \frac{C_z}{\sqrt{(C_z^2+S_z^2)}} \\
\sin\omega =& \frac{S_z}{\sqrt{(C_z^2+S_z^2)}}
\end{aligned}
\tag{4.7.9}
$$

座標計算には三角関数のみを用いるので，これから角度 ω を逆算する必要はない．

器械を設置または移動する度に，この基本測定と基本演算を行ってこれらの座標変換パラメーターを求めておく．

(x_0，y_0，z_0)
($\cos\omega$，$\sin\omega$)

■ 任意の測点の座標計算（測点 pj）

任意点を測定して，測定ブロックデータ

V_j ：鉛直角 [rad]
H_j ：水平角 [rad]
D_j ：斜距離 [m]

を得たとして，座標系 O-$\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}$ に関する座標を求める．

これをグローバル座標系 O-xyz に関する座標で表わせば

$$
\begin{aligned}
x_j =& D_j \sin V_j \cos H_j \\
y_j =& D_j \sin V_j \sin H_j \\
z_j =& D_j \cos V_j
\end{aligned}
\tag{4.7.10}
$$

グローバル座標系を平行移動した第 1 ローカル座標系 O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ に関する座標で表わせば

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_j =& x_j - x_0 \\
\bar{y}_j =& y_j - y_0 \\
\bar{z}_j =& z_j - z_0
\end{aligned}
\tag{4.7.11}
$$

第 1 ローカル座標系をさらに回転移動した第 2 ローカル座標系系 O-$\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}$ に関する座標で表わせば

$$
\begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_j \\ \bar{\bar{y}}_j \\ \bar{\bar{z}}_j \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bar{x}_j \\ \bar{y}_j \\ \bar{z}_j \end{bmatrix}
\tag{4.7.12}
$$

これをまとめると，二点法の変換式が得られる．

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_j \\ \bar{\bar{y}}_j \\ \bar{\bar{z}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.7.13}$$

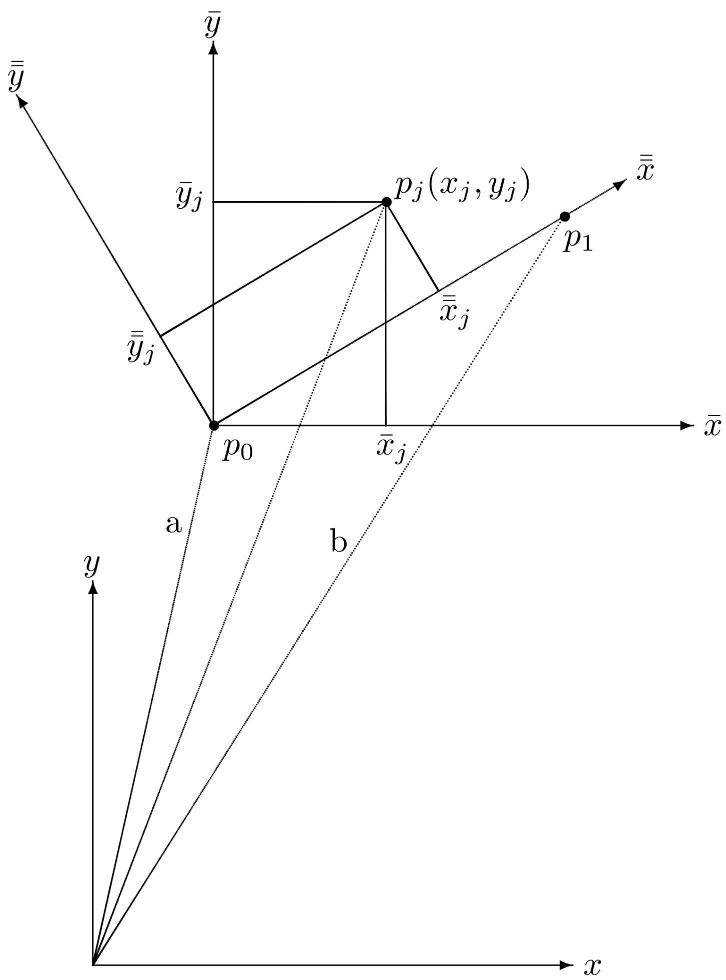

Fig.9: xy 面に射影した
（座標系 O-xyz，O-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$，O-$\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}$）

4.7.3　三点法

既に測量した 3 点から逆に座標系を定義する．座標原点が造成や建造によって隠れてしまって視通を確保できない場合などに測量結果を二次利用する方法である．仮想的な座標

原点を求める方法とも言える．名称は三点法であっても，測点は 2 点以上何点あってもよい．統計的には大数の法則により測点の数が増えるほど精度が上がる[*5]．

真値とされる基準点（ 1 点）が存在する場合としない場合があり，それぞれ測定結果が異なる．

座標系の定義は二点法と共通として計算に必要な座標を書き出すと：

- グローバル座標系に関する座標（測定値で誤差がある）

$$(x_1,\ y_1,\ z_1),\ (x_2,\ y_2,\ z_2),\ (x_3,\ y_3,\ z_3)$$

もちろんこれらは測点に置かれたターゲットを視準して得られる．

$$\begin{aligned}
x_1 &= D_1 \sin V_1 \cos H_1 & x_2 &= D_2 \sin V_2 \cos H_2 & x_3 &= D_3 \sin V_3 \cos H_3 \\
y_1 &= D_1 \sin V_1 \sin H_1 & y_2 &= D_2 \sin V_2 \sin H_2 & y_3 &= D_3 \sin V_3 \sin H_3 \\
z_1 &= D_1 \cos V_1 & z_2 &= D_2 \cos V_2 & z_3 &= D_3 \cos V_3
\end{aligned}$$

- 第 2 ローカル座標系に関する座標（誤差がないと仮定）

$$(\bar{\bar{x}}_1,\ \bar{\bar{y}}_1,\ \bar{\bar{z}}_1),\ (\bar{\bar{x}}_2,\ \bar{\bar{y}}_2,\ \bar{\bar{z}}_2),\ (\bar{\bar{x}}_3,\ \bar{\bar{y}}_3,\ \bar{\bar{z}}_3)$$

■グローバル座標系に関する座標

座標原点の座標 z_0 は最も単純な統計的手段である平均値として求める．

$$z_0 = \frac{(z_1 - \bar{\bar{z}}_1) + (z_2 - \bar{\bar{z}}_2) + (z_3 - \bar{\bar{z}}_3)}{3} \tag{4.7.14}$$

z 軸周りの回転式を 2 次元に変更して用いる．回転角は 3 次元の場合と同様，x 軸が y 軸に向かう方向を正とする．

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \leftarrow (3.1b)$$

3 点のグローバル座標に対する回転角は共通と仮定できるから．

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_2 - \bar{\bar{x}}_1 & \bar{\bar{y}}_2 - \bar{\bar{y}}_1 \\ \bar{\bar{x}}_3 - \bar{\bar{x}}_2 & \bar{\bar{y}}_3 - \bar{\bar{y}}_2 \\ \bar{\bar{x}}_1 - \bar{\bar{x}}_3 & \bar{\bar{y}}_1 - \bar{\bar{y}}_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{4.7.15}$$

[*5] それが妥当するには大数の測点が必要なので，たかが 3 点では測点に高い精度が要求される

最小二乗法によれば近似的に次の等式が成り立つ（§4.4.2 参照）.

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_2 & x_1-x_3 \\ y_2-y_1 & y_3-y_2 & y_1-y_3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \\
&=\begin{bmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_2 & x_1-x_3 \\ y_2-y_1 & y_3-y_2 & y_1-y_3 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_2-\bar{\bar{x}}_1 & \bar{\bar{y}}_2-\bar{\bar{y}}_1 \\ \bar{\bar{x}}_3-\bar{\bar{x}}_2 & \bar{\bar{y}}_3-\bar{\bar{y}}_2 \\ \bar{\bar{x}}_1-\bar{\bar{x}}_3 & \bar{\bar{y}}_1-\bar{\bar{y}}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.7.16}
$$

行列積を実施すれば式（4.4.5）は次のように集約できる.

$$
\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}
\tag{4.7.17}
$$

左辺の行列の対角要素は $f_{12}=f_{21}$ であるから

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{g_{11}+g_{22}}{f_{11}+f_{22}} \\
S &= \frac{g_{21}-g_{12}}{f_{11}+f_{22}}
\end{aligned}
\tag{4.7.18}
$$

これを三角関数に戻す

$$
\begin{aligned}
\cos\omega =& \frac{C}{\sqrt{(C^2+S^2)}} \\
\sin\omega =& \frac{S}{\sqrt{(C^2+S^2)}}
\end{aligned}
\tag{4.7.19}
$$

グローバル座標系 O-xyz と第 1 ローカル座標系 0-$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ の各座標軸は互いに平行だから.

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_1 \\ \bar{\bar{y}}_1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_2 \\ \bar{\bar{y}}_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{y}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_3 \\ \bar{\bar{y}}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.7.20}
$$

座標原点の座標 x_0，x_0 も平均値として求める.

$$
\begin{aligned}
x_0 =& \frac{(\ x_1-\bar{x}_1\ )+(\ x_2-\bar{x}_2\ )+(\ x_3-\bar{x}_3\ )}{3} \\
y_0 =& \frac{(\ y_1-\bar{y}_1\ )+(\ y_2-\bar{y}_2\ )+(\ y_3-\bar{y}_3\ )}{3}
\end{aligned}
\tag{4.7.21}
$$

ただし特定の測点 p_k $(k = 1,2,3)$ を基準点 (真値) とする場合，式（4.7.14）および式（4.7.21）に代わりに

$$\begin{aligned} x_0 &= x_k - \bar{x}_k \\ y_0 &= y_k - \bar{y}_k \\ z_0 &= z_k - \bar{z}_k \end{aligned} \tag{4.7.22}$$

とする．

任意の測点 p_j を視準して得た座標 (x_j，y_j，z_j) の座標系 O-$\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}\bar{\bar{z}}$ に関する座標が求まる．

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{x}}_j \\ \bar{\bar{y}}_j \\ \bar{\bar{z}}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.7.23}$$